ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Μονάδα Προβλέψεων & Στρατηγικής
Forecasting & Strategy Unit

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές

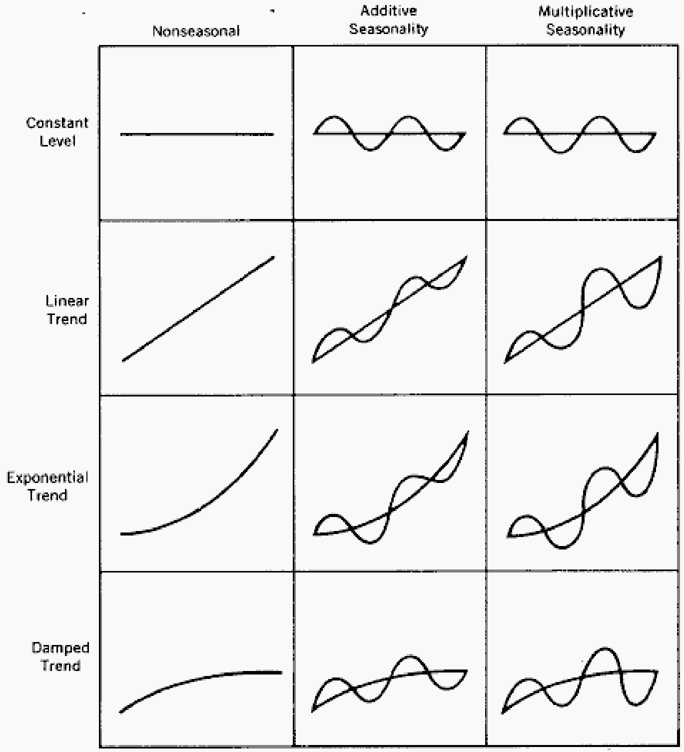
Μέθοδοι Εκθετικής Εξομάλυνσης Διάλεξη 5

Εκθετική Εξομάλυνση
(Exponential Smoothing)

- Μέθοδος πρόβλεψης η οποία εξομαλύνει τα ιστορικά δεδομένα.
- Υπολογίζεται ο μέσος όρος των δεδομένων, με την χρήση συντελεστών βαρύτητας.
- Τα πιο πρόσφατα δεδομένα έχουν μεγαλύτερη βαρύτητα.
- Οι συντελεστές βαρύτητας μειώνονται με εκθετικό τρόπο, όσο παλαιότερα είναι τα δεδομένα.
- Στόχος η απομόνωση του προτύπου των δεδομένων από τις τυχαίες διακυμάνσεις.
- Χρησιμοποιείται ευρέως για βραχυπρόθεσμο σχεδιασμό.
- Είναι σχετικά εύκολη στην χρήση.
- Απαιτεί ελάχιστα ιστορικά δεδομένα και χρόνο υπολογισμού.
- Είναι ικανοποιητικά ακριβής σε σχέση με πολυπλοκότερες μεθόδους πρόβλεψης.

Τύποι Μοντέλων Εξομάλυνσης

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές



- **Σταθερού Επιπέδου**
  - ✓ Για πρόβλεψη ενός βήματος.
  - ✓ Για χρονοσειρές που περιέχουν υψηλό θόρυβο ή τυχαιότητα.
- **Γραμμικής τάσης**
  - ✓ Για σταθερή αύξηση στο μέλλον.
- **Εκθετικής τάσης**
  - ✓ Για εκθετική αύξηση στο μέλλον (π.χ. στις αρχές του κύκλου ζωής ενός προϊόντος).
  - ✓ Είναι υπεραισιόδοξες για μακροπρόθεσμες προβλέψεις.
- **Φθίνουσας τάσης**
  - ✓ Για μεσοπρόθεσμες προβλέψεις.

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές

Χρόνος t	Δεδομένα X_t	Πρόβλεψη F $\hat{X}_{t-1}(1)$	Σφάλμα e_t	Επιπεδο στο τέλος της περιόδου t $S_t = S_{t-1} + h_1 e_t$
0				S0 = 585
1	545	585	-40	S1 = 585 + 0.4(-40) = 569
2	635	569	66	S2 = 569 + 0.4(6.6) = 595.4
3	420	595,4	-175,4	S3 = 595.4 + 0.4(-175.4) = 525.2
4	716	525,2	190,8	S4 = 525.2 + 0.4(190.8) = 601.5
5	699	601,5	97,5	S5 = 601.5 + 0.4(97,5) = 640.5
6	681	640,5	40,5	S6 = 640,5 + 0.4(40.5) = 656.5
7	763	656,5	106,3	S7 = 656.5 + 0.4(106.3) = 699.2
8	778	699,2	78,8	S8 = 699.2 + 0.4(78.8) = 730.5
9	690	730,5	-40,5	S9 = 730.5 + 0.4(-40.5) = 711.4
10	707	711,4	-7,4	S10 = 711.4 + 0.4(-7.4) = 711.5
11	716	711,5	4,5	S11 = 711.5 + 0.4(4.5) = 713.3
12		713,3		

$$e_t = Y_t - F_t$$

$$S_t = S_{t-1} + \alpha \cdot e_t$$

$$F_{t+1} = S_t$$

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES (0)

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές

Εξίσωση Σφάλματος

$$e = Y_{t-1} - F_{t-1}$$

Εξίσωση Επιπέδου & Πρόβλεψης

$$F_t = F_{t-1} + \alpha e$$

$$F_t = F_{t-1} + \alpha(Y_{t-1} - F_{t-1})$$

$$F_t = \alpha Y_{t-1} + (1-\alpha)F_{t-1}$$

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES (I)

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές

Εξίσωση Σφάλματος

$e = Y_{t-1} - F_{t-1}$

$F_t = \alpha Y_{t-1} + (1-\alpha)F_{t-1}$

Εξίσωση Επιπέδου & Πρόβλεψης

$F_{t+1} = \alpha Y_t + (1-\alpha)F_t$

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)\, Y_{t-1} + (1-\alpha)^2\, F_{t-1}$$

Ομοίως αντικαθιστώντας στην (3) το F_{t-1}, κοκ , προκύπτει:

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)\, Y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2\, Y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3\, Y_{t-3}\, \alpha(1-\alpha)^4\, Y_{t-4} + \ldots$$

$$\ldots + \alpha(1-\alpha)^{t-1}\, Y_1 + (1-\alpha)^t F_1$$

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES (II)

Από την εξίσωση (4) παρατηρούμε

- Ότι οι συντελεστές (βάρη) των των ιστορικών δεδομένων Y μειώνονται εκθετικά για αυτό και το όνομα της μεθόδου «εκθετική εξομάλυνση».
- Ότι ο τελευταίος όρος είναι ο $(1\text{-}a)^t F_1$. Αυτό σημαίνει ότι η αρχική πρόβλεψη παίζει ρόλο σε όλες τις επόμενες προβλέψεις. Στο παράδειγμα μας υπολογίζονται τα βάρη για t = 11, ισχύει :

$(1\text{-}a)^t = 0.3138$ αν $a=0.1$

$(1\text{-}a)^t = 0.0004$ αν $a=0.5$

$(1\text{-}a)^t = 0.0000$ αν $a=0.9$

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES (III)

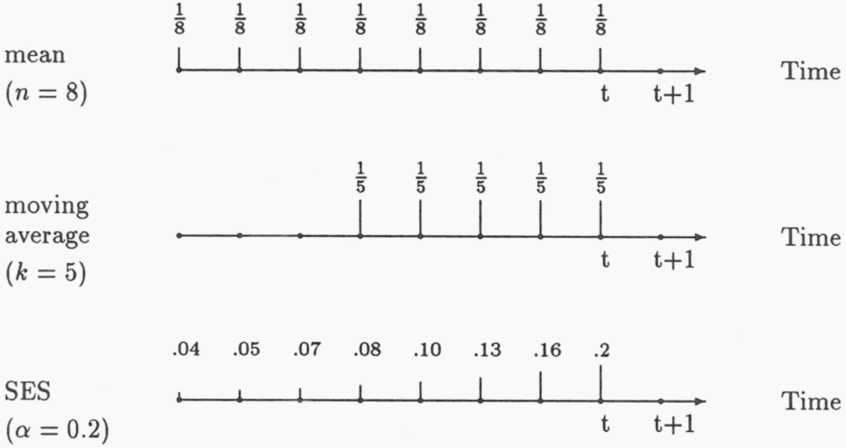
- ✓ Όσο μικρότερη τιμή του α επιλέξουμε τόσο μεγαλύτερο ρόλο παίζει η πρώτη τιμή της πρόβλεψης που θα επιλέξουμε F1.
- ✓ Όσο περισσότερα δεδομένα έχουμε τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του t, οπότε τόσο μικρότερο είναι το βάρος του F1.

Π.χ. για t = 12 και α=0.1 το βάρος ισούται με 0.2824

για t = 24 και α=0.1 το βάρος ισούται με 0.0798

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου (IV)

Weight assigned to:	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$
Y_t	0.2	0.4	0.6	0.8
Y_{t-1}	0.16	0.24	0.24	0.16
Y_{t-2}	0.128	0.144	0.096	0.032
Y_{t-3}	0.1024	0.0864	0.0384	0.0064
Y_{t-4}	$(0.2)(0.8)^4$	$(0.4)(0.6)^4$	$(0.6)(0.4)^4$	$(0.8)(0.2)^4$



Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES (VI)

- ✓ Σαν αρχική πρόβλεψη συνήθως χρησιμοποιούμε:
  - ✓ Μέσος όρος των παρατηρήσεων
  - ✓ Μέσος όρος των τεσσάρων ή πέντε πρώτων παρατηρήσεων
  - ✓ Πρώτη παρατήρηση
  - ✓ Σταθερό επίπεδο από μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES (VII)

Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Εξομάλυνσης

- ✓ Η βέλτιστη τιμή του α καθορίζεται από την ελαχιστοποίηση του σφάλματος (MSE, MAPE , ή άλλων)
- ✓ Το α μπορεί να είναι διαφορετικό όταν στοχεύουμε στην ελαχιστοποίηση του MSE, και άλλο για την ελαχιστοποίηση του MAPE, κλπ
- ✓ Το α κυμαίνεται μεταξύ του διαστήματος [0,1].
- ✓ Υπολογίζουμε τα σφάλματα για κάθε τιμή του α, για κάθε τιμή του in sample

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES (VII)

Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Εξομάλυνσης

- ✓ Η βέλτιστη τιμή του α καθορίζεται από την ελαχιστοποίηση του σφάλματος (MSE, MAPE , ή άλλων)
- ✓ Το α μπορεί να είναι διαφορετικό όταν στοχεύουμε στην ελαχιστοποίηση του MSE, και άλλο για την ελαχιστοποίηση του MAPE, κλπ
- ✓ Το α κυμαίνεται μεταξύ του διαστήματος [0,1].
- ✓ Υπολογίζουμε τα σφάλματα για κάθε τιμή του α, για κάθε τιμή του in sample
- ✓ Ένας τρόπος για τη βελτιστοποίηση του α είναι ο υπολογισμόςτου MSE για κάποιο αριθμό τιμών του α (πχ 0.1, 0.2, ..., 0.9) και επιλογή εκείνου που δίνει το μικρότερο σφάλμα MSE.
- ✓ Εναλλακτικός τρόπος είναι η χρήση ενός μη γραμμικού αλγορίθμου βελτιστοποίησης.

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (Ι)

t	Y
0	
1	200
2	135
3	195
4	197,5
5	310
6	175
7	155
8	130
9	220
10	277,5
11	235
12	???

- Μηνιαία δεδομένα t
- Αριθμός μηνιαίων φορτώσεων Y_t

Ζητείται η πρόβλεψη Δεκεμβρίου.

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (II)

t	Y	F	e	S = F + a*e	S = a*Y + (1-a)*F	S
0						167,5
1	200	167,5	32,5	167,5 + 0.2 * 32,5	0.2 * 200 + 0.8 * 167,5	174,0
2	135	174,0	-39,0	174 + 0.2 * -39	0.2 * 135 + 0.8 * 174	166,2
3	195	166,2	28,8	166,2 + 0.2 * 28,8	0.2 * 195 + 0.8 * 166,2	172,0
4	197,5	172,0	25,5	172 + 0.2 * 25,5	0.2 * 197,5 + 0.8 * 172	177,1
5	310	177,1	132,9	177,1 + 0.2 * 132,9	0.2 * 310 + 0.8 * 177,1	203,7
6	175	203,7	-28,7	203,7 + 0.2 * -28,7	0.2 * 175 + 0.8 * 203,7	197,9
7	155	197,9	-42,9	197,9 + 0.2 * -42,9	0.2 * 155 + 0.8 * 197,9	189,3
8	130	189,3	-59,3	189,3 + 0.2 * -59,3	0.2 * 130 + 0.8 * 189,3	177,5
9	220	177,5	42,5	177,5 + 0.2 * 42,5	0.2 * 220 + 0.8 * 177,5	186,0
10	277,5	186,0	91,5	186 + 0.2 * 91,5	0.2 * 277,5 + 0.8 * 186	204,3
11	235	204,3	30,7	204,3 + 0.2 * 30,7	0.2 * 235 + 0.8 * 204,3	210,4
12	???	210,4				

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (ΙΙΙ)

t	Y	F	e	S = F + a*e	S = a*Y + (1-a)*F	S
0						167,5
1	200	167,5	32,5	167,5 + 0.2 * 32,5	0.2 * 200 + 0.8 * 167,5	174,0
2	135	174,0	-39,0	174 + 0.2 * -39	0.2 * 135 + 0.8 * 174	166,2
3	195	166,2	28,8	166,2 + 0.2 * 28,8	0.2 * 195 + 0.8 * 166,2	172,0
4	197,5	172,0	25,5	172 + 0.2 * 25,5	0.2 * 197,5 + 0.8 * 172	177,1
5	310	177,1	132,9	177,1 + 0.2 * 132,9	0.2 * 310 + 0.8 * 177,1	203,7
6	175	203,7	-28,7	203,7 + 0.2 * -28,7	0.2 * 175 + 0.8 * 203,7	197,9
7	155	197,9	-42,9	197,9 + 0.2 * -42,9	0.2 * 155 + 0.8 * 197,9	189,3
8	130	189,3	-59,3	189,3 + 0.2 * -59,3	0.2 * 130 + 0.8 * 189,3	177,5
9	220	177,5	42,5	177,5 + 0.2 * 42,5	0.2 * 220 + 0.8 * 177,5	186,0
10	277,5	186,0	91,5	186 + 0.2 * 91,5	0.2 * 277,5 + 0.8 * 186	204,3
11	235	204,3	30,7	204,3 + 0.2 * 30,7	0.2 * 235 + 0.8 * 204,3	210,4
12	???	210,4				

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (III)

α = 0.5

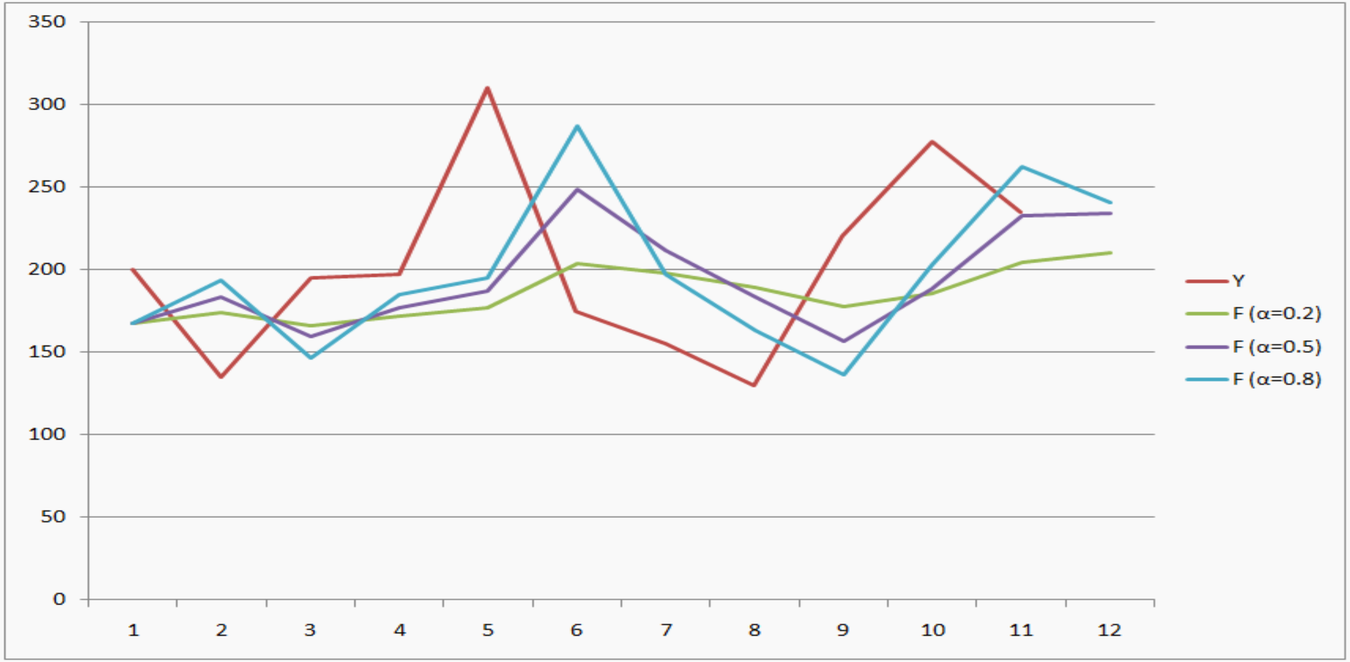
t	Y	F	e	S
0				167,5
1	200	167,5	32,5	183,8
2	135	183,8	-48,8	159,4
3	195	159,4	35,6	177,2
4	197,5	177,2	20,3	187,3
5	310	187,3	122,7	248,7
6	175	248,7	-73,7	211,8
7	155	211,8	-56,8	183,4
8	130	183,4	-53,4	156,7
9	220	156,7	63,3	188,4
10	277,5	188,4	89,1	232,9
11	235	232,9	2,1	234,0
12	???	234,0		

α = 0.8

t	Y	F	e	S
0				167,5
1	200	167,5	32,5	193,5
2	135	193,5	-58,5	146,7
3	195	146,7	48,3	185,3
4	197,5	185,3	12,2	195,1
5	310	195,1	114,9	287,0
6	175	287,0	-112,0	197,4
7	155	197,4	-42,4	163,5
8	130	163,5	-33,5	136,7
9	220	136,7	83,3	203,3
10	277,5	203,3	74,2	262,7
11	235	262,7	-27,7	240,5
12	???	240,5		

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (IV)



Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (V)

Η μεγαλύτερη τιμή του α = (0.8) εξομαλύνει πολύ λίγο το μοντέλο ενώ η μικρότερη α= (0.2) δίνει την καλύτερη εξομάλυνση.

Αν το α = 1, τότε η εκθετική εξομάλυνση γίνεται Naive, ενώ αν α = 0 τότε η πρόβλεψή μας είναι σταθερή και ίση με την αρχική πρόβλεψη.

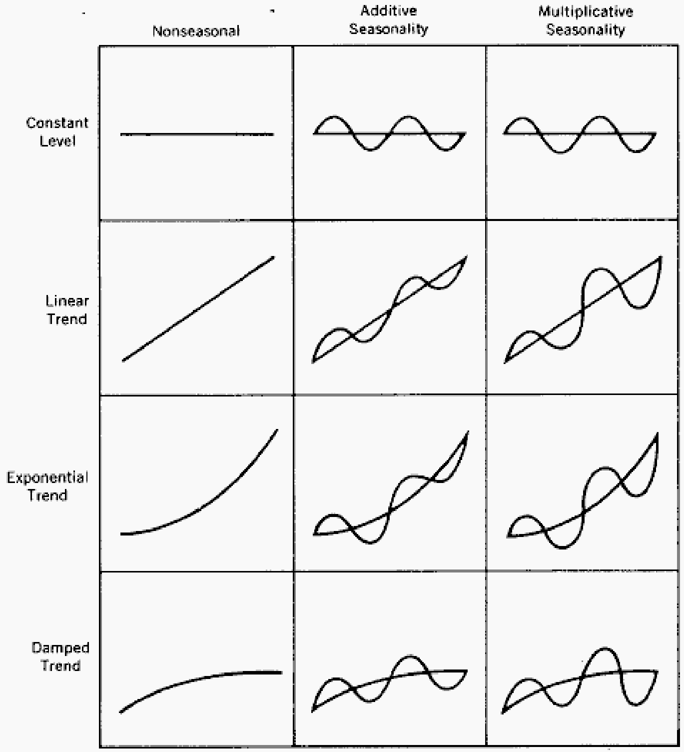
Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (III)

t	Y	F (α=0.2)	E	AE	APE	SAPE
1	200	167,5	32,50	32,50	0,163	0,177
2	135	174,0	-39,00	39,00	0,289	0,252
3	195	166,2	28,80	28,80	0,148	0,159
4	197,5	172,0	25,54	25,54	0,129	0,138
5	310	177,1	132,93	132,93	0,429	0,546
6	175	203,7	-28,65	28,65	0,164	0,151
7	155	197,9	-42,92	42,92	0,277	0,243
8	130	189,3	-59,34	59,34	0,456	0,372
9	220	177,5	42,53	42,53	0,193	0,214
10	277,5	186,0	91,52	91,52	0,330	0,395
11	235	204,3	30,72	30,72	0,131	0,140
12		210,4				
		α=0.2	19,51	50,41	0,25	0,25
		α=0.5	12,08	54,39	0,27	0,27
		α=0.8	8,30	58,13	0,29	0,29

Τύποι Μοντέλων Εξομάλυνσης

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές



- **Σταθερού Επιπέδου**
  - ✓ Για πρόβλεψη ενός βήματος.
  - ✓ Για χρονοσειρές που περιέχουν υψηλό θόρυβο ή τυχαιότητα.
- **Γραμμικής τάσης**
  - ✓ Για σταθερή αύξηση στο μέλλον.
- **Εκθετικής τάσης**
  - ✓ Για εκθετική αύξηση στο μέλλον (π.χ. στις αρχές του κύκλου ζωής ενός προϊόντος).
  - ✓ Είναι υπεραισιόδοξες για μακροπρόθεσμες προβλέψεις.
- **Φθίνουσας τάσης**
  - ✓ Για μεσοπρόθεσμες προβλέψεις.

Μοντέλο Γραμμικής Τάσης (Holt)

$$e_t = Y_t - F_t$$
$$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + a * e_t$$
$$T_t = T_{t-1} + a * b * e_t$$
$$\mathrm{F}_{t+m} = S_t + mT_t$$

Οι συντελεστές α και β πρέπει να υπολογίζονται, ώστε να ελαχιστοποιείται *συνήθως* το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), όπου 0<α<1, 0<β<a

- ✓ Χρειάζεται προσοχή στην αρχικοποίηση του μοντέλου.
- ✓ Πρέπει να εκτελείται μία γραμμική παλινδρόμηση, με το χρόνο ως ανεξάρτητη μεταβλητή.
- ✓ Ως αρχικό επίπεδο *συνήθως* ορίζεται η σταθερά Α της παλινδρόμησης.
- ✓ Ως αρχική τάση *συνήθως* ορίζεται η κλίση Β της παλινδρόμησης.

FSU

Μοντέλο Γραμμικής Τάσης (Holt)

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές

$$e_t = Y_t - F_t$$
$$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + a * e_t$$
$$T_t = T_{t-1} + a * b * e_t$$
$$\mathrm{F}_{t+m} = S_t + mT_t$$

Οι συντελεστές α και β πρέπει να υπολογίζονται, ώστε να ελαχιστοποιείται *συνήθως* το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), όπου $0<\alpha<1$, $0<\beta<a$

Η αρχικοποίηση του επιπέδου και της τάσης θα μπορούσε να γίνει εναλλακτικά:

- **Αρχικό Επίπεδο**
  - Πρώτη Παρατήρηση
  - Μέσος Όρος Ν πρώτων παρατηρήσεων
- **Αρχική Τάση**
  - Διαφορά δεύτερης και πρώτης παρατήρησης: $(X_2 - X_1)$
  - Διαφορά ν-στής και πρώτης παρατήρησης διαιρεμένης με ν-1: $(X_4 - X_1)/3$

FSU

Μοντέλο Γραμμικής Τάσης (Holt)

$$F_{t+m} = S_t + m \cdot T_t$$

$$e_t = Y_t - F_t$$

$$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + \alpha \cdot e_t$$

$$T_t = T_{t-1} + \beta \cdot e_t$$

$h_1 = 0.20,\ h_2 = 0.10$

Time t	Data X_t	Forecast $X_{t-1}(1)$	Error e_t	Level at End of t $S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + h_1 e_t$	Trend at End of t $T_t = T_{t-1} + h_2 e_t$	Forecast for $t+1$ $\hat{X}_t(1) = S_t + T_t$
0				$S_0 = 54.0$	$T_0 = 2.0$	$\hat{X}_0(1) = 54.0 + 2.0 = 56.0$
1	54.0	56.0	−2.0	$S_1 = 54.0 + 2.0 + 0.2(-2.0) = 55.6$	$T_1 = 2.0 + 0.1(-2.0) = 1.8$	$\hat{X}_1(1) = 55.6 + 1.8 = 57.4$
2	55.0	57.4	−2.4	$S_2 = 55.6 + 1.8 + 0.2(-2.4) = 56.9$	$T_2 = 1.8 + 0.1(-2.4) = 1.6$	$\hat{X}_2(1) = 56.9 + 1.6 = 58.5$
3	57.0	58.5	−1.5	$S_3 = 56.9 + 1.6 + 0.2(-1.5) = 58.2$	$T_3 = 1.6 + 0.1(-1.5) = 1.5$	$\hat{X}_3(1) = 58.2 + 1.5 = 59.7$
4	60.0	59.7	0.3	$S_4 = 58.2 + 1.5 + 0.2(\ 0.3) = 59.8$	$T_4 = 1.5 + 0.1(\ 0.3) = 1.5$	$\hat{X}_4(1) = 59.8 + 1.5 = 61.3$
5	66.0	61.3	4.7	$S_5 = 59.8 + 1.5 + 0.2(\ 4.7) = 62.2$	$T_5 = 1.5 + 0.1(\ 4.7) = 2.0$	$\hat{X}_5(1) = 62.2 + 2.0 = 64.2$
6	62.0	64.2	−2.2	$S_6 = 62.2 + 2.0 + 0.2(-2.2) = 63.8$	$T_6 = 2.0 + 0.1(-2.2) = 1.8$	$\hat{X}_6(1) = 63.8 + 1.8 = 65.6$
7	59.0	65.6	−6.6	$S_7 = 63.8 + 1.8 + 0.2(-6.6) = 64.3$	$T_7 = 1.8 + 0.1(-6.6) = 1.1$	$\hat{X}_7(1) = 64.3 + 1.1 = 65.4$
8	65.0	65.4	−0.4	$S_8 = 64.3 + 1.1 + 0.2(-0.4) = 65.3$	$T_8 = 1.1 + 0.1(-0.4) = 1.1$	$\hat{X}_8(1) = 65.3 + 1.1 = 66.4$
9	69.0	66.4	2.6	$S_9 = 65.3 + 1.1 + 0.2(\ 2.6) = 66.9$	$T_9 = 1.1 + 0.1(\ 2.6) = 1.4$	$\hat{X}_9(1) = 66.9 + 1.4 = 68.3$
10	70.0	68.3	1.7	$S_{10} = 66.9 + 1.4 + 0.2(\ 1.7) = 68.6$	$T_{10} = 1.4 + 0.1(\ 1.7) = 1.6$	$\hat{X}_{10}(1) = 68.6 + 1.6 = 70.2$
11	63.0	70.2	−7.2	$S_{11} = 68.6 + 1.6 + 0.2(-7.2) = 68.8$	$T_{11} = 1.6 + 0.1(-7.2) = 0.9$	$\hat{X}_{11}(1) = 68.8 + 0.9 = 69.7$
12	75.0	69.7	5.3	$S_{12} = 68.8 + 0.9 + 0.2(\ 5.3) = 70.8$	$T_{12} = 0.9 + 0.1(\ 5.3) = 1.4$	$\hat{X}_{12}(1) = 70.8 + 1.4 = 72$
13		72.2				

Μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης (Damped)

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές

$$e_t = Y_t - F_t$$
$$S_t = S_{t-1} + \varphi T_{t-1} + a * e_t$$
$$T_t = \varphi T_{t-1} + a * b * e_t$$
$$\mathrm{F}_{t+m} = S_t + \sum_{i=1}^{m} \varphi^i T_t$$

Οι συντελεστές α και β πρέπει να υπολογίζονται, ώστε να ελαχιστοποιείται *συνήθως* το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), όπου 0<α<1, 0<β<a

- Χρειάζεται προσοχή στην αρχικοποίηση του μοντέλου.
- Πρέπει να εκτελείται μία γραμμική παλινδρόμηση, με το χρόνο ως ανεξάρτητη μεταβλητή.
- Ως αρχικό επίπεδο ορίζεται η σταθερά A της παλινδρόμησης.
- Ως αρχική τάση ορίζεται η κλίση b της παλινδρόμησης.

Μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης (Damped)

$$e_t = Y_t - F_t$$
$$S_t = S_{t-1} + \varphi T_{t-1} + a * e_t$$
$$T_t = \varphi T_{t-1} + a * b * e_t$$
$$\mathrm{F}_{t+m} = S_t + \sum_{i=1}^{m} \varphi^i T_t$$

Οι συντελεστές α και β πρέπει να υπολογίζονται, ώστε να ελαχιστοποιείται *συνήθως* το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), όπου 0<α<1, 0<β<a

- Το μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα αυτόματο μοντέλο πρόβλεψης για κάθε μη εποχιακή χρονοσειρά, ανάλογα με τον damping factor που θα επιλέξουμε:
  - $\phi \approx 0$,σταθερού επιπέδου
  - $\phi < 1$,φθίνουσας τάσης
  - $\phi \approx 1$,γραμμικής τάσης
  - $\phi > 1$,εκθετικής τάσης

FSU

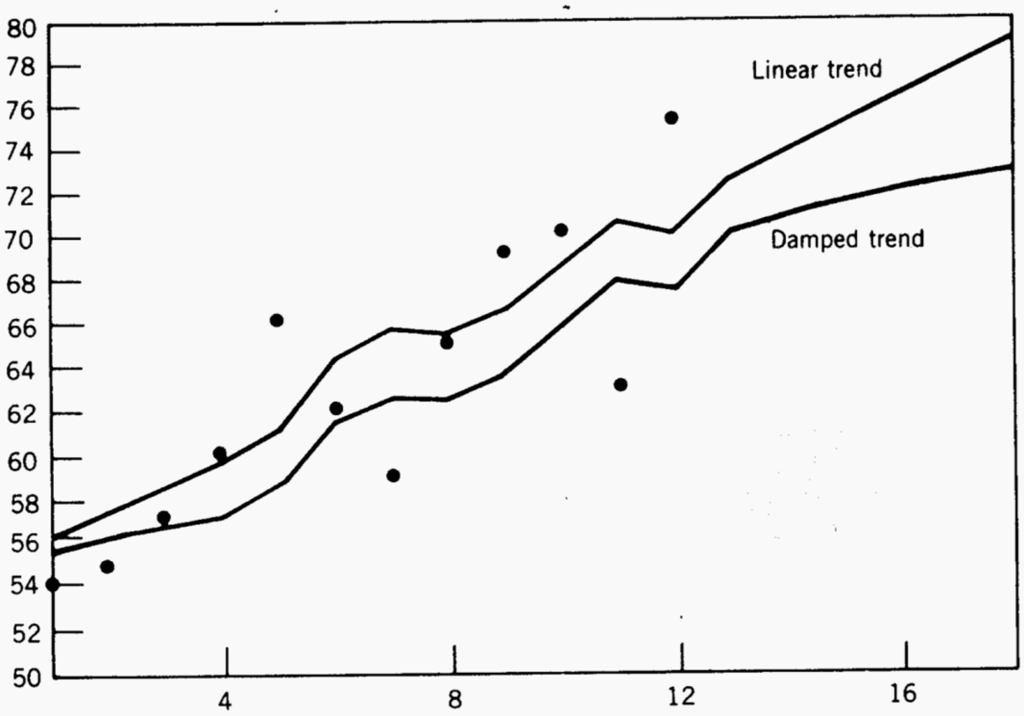
Μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης (Damped)

$h_1 = 0.2, \quad h_2 = 0.1, \quad \varphi = 0.8$

Time t	Data X_t	Forecast $X_{t-1}(1)$	Error e_t	Level at End of t: $S_t = S_{t-1} + \phi T_{t-1} + h_1 e_t$	Trend at End of t: $T_t = \phi T_{t-1} + h_2 e_t$	Forecast for $t+1$: $\hat{X}_t(1) = S_t + \phi T_t$
0				$S_0 = 54.0$	$T_0 = 2.0$	$\hat{X}_0(1) = 54.0 + 0.8(2.0) = 55.6$
1	54.0	55.6	−1.6	$S_1 = 54.0 + 0.8(2.0) + 0.2(-1.6) = 55.3$	$T_1 = 0.8(2.0) + 0.1(-1.6) = 1.4$	$\hat{X}_1(1) = 55.3 + 0.8(1.4) = 56.4$
2	55.0	56.4	−1.4	$S_2 = 55.3 + 0.8(1.4) + 0.2(-1.4) = 56.1$	$T_2 = 0.8(1.4) + 0.1(-1.4) = 1.0$	$\hat{X}_2(1) = 56.1 + 0.8(1.0) = 56.9$
3	57.0	56.9	0.1	$S_3 = 56.1 + 0.8(1.0) + 0.2(0.1) = 56.9$	$T_3 = 0.8(1.0) + 0.1(0.1) = 0.8$	$\hat{X}_3(1) = 56.9 + 0.8(0.8) = 57.5$
4	60.0	57.5	2.5	$S_4 = 56.9 + 0.8(0.8) + 0.2(2.5) = 58.0$	$T_4 = 0.8(0.8) + 0.1(2.5) = 0.9$	$\hat{X}_4(1) = 58.0 + 0.8(0.9) = 58.7$
5	66.0	58.7	7.3	$S_5 = 58.0 + 0.8(0.9) + 0.2(7.3) = 60.2$	$T_5 = 0.8(0.9) + 0.1(7.3) = 1.5$	$\hat{X}_5(1) = 60.2 + 0.8(1.5) = 61.4$
6	62.0	61.4	0.6	$S_6 = 60.2 + 0.8(1.5) + 0.2(0.6) = 61.5$	$T_6 = 0.8(1.5) + 0.1(0.6) = 1.3$	$\hat{X}_6(1) = 61.5 + 0.8(1.3) = 62.5$
7	59.0	62.5	−3.5	$S_7 = 61.5 + 0.8(1.3) + 0.1(-3.5) = 61.8$	$T_7 = 0.8(1.3) + 0.1(-3.5) = 0.7$	$\hat{X}_7(1) = 61.8 + 0.8(0.7) = 62.4$
8	65.0	62.4	2.6	$S_8 = 61.8 + 0.8(0.7) + 0.2(2.6) = 62.9$	$T_8 = 0.8(0.7) + 0.1(2.6) = 0.8$	$\hat{X}_8(1) = 62.9 + 0.8(0.8) = 63.5$
9	69.0	63.5	5.5	$S_9 = 62.9 + 0.8(0.8) + 0.2(5.5) = 64.6$	$T_9 = 0.8(0.8) + 0.1(5.5) = 1.2$	$\hat{X}_9(1) = 64.6 + 0.8(1.2) = 65.6$
10	70.0	65.6	4.4	$S_{10} = 64.6 + 0.8(1.2) + 0.2(4.4) = 66.5$	$T_{10} = 0.8(1.2) + 0.1(4.4) = 1.4$	$\hat{X}_{10}(1) = 66.5 + 0.8(1.4) = 67.6$
11	63.0	67.6	−4.6	$S_{11} = 66.5 + 0.8(1.4) + 0.2(-4.6) = 66.7$	$T_{11} = 0.8(1.4) + 0.1(-4.6) = 0.7$	$\hat{X}_{11}(1) = 66.7 + 0.8(0.7) = 67.3$
12	75.0	67.3	7.7	$S_{12} = 66.7 + 0.8(0.7) + 0.2(7.7) = 68.8$	$T_{12} = 0.8(0.7) + 0.1(7.7) = 1.3$	$\hat{X}_{12}(1) = 68.8 + 0.8(1.3) = 69.8$
13		69.8				

Σύγκριση Μοντέλων Γραμμικής & Μη Γραμμικής Τάσης

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές



Εποχιακή Εξομάλυνση

Αν τα δεδομένα έχουν εποχιακό πρότυπο, τότε στα μη εποχιακά μοντέλα προστίθεται ένας εποχιακός παράγοντας (index) για κάθε περίοδο του έτους.

- Αφαίρεση Προσθετικής Εποχιακότητας
  - actual data - index = deseasonalized data
- Αφαίρεση Πολλαπλασιαστικής Εποχιακότητας
  - actual data / index = deseasonalized data

- Προσθετική Εποχιακότητα
  - actual data + index = deseasonalized data
- Πολλαπλασιαστική Εποχιακότητα
  - actual data * index = deseasonalized data

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου με Πολ/κή Εποχιακότητα

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές

$$e_t = Y_t - F_t$$

$$S_t = S_{t-1} + \frac{\alpha \cdot e_t}{I_{t-p}}$$

$$I_t = I_{t-p} + \frac{\gamma \cdot e_t}{S_t}$$

$$F_{t+m} = S_t \cdot I_{t-p+m}$$

Αρχικοποίηση μοντέλου

1. Υπολογισμός αρχικών εποχιακών συντελεστών.
   - Χρήση μοντέλου αποσύνθεσης.
2. Υπολογισμός S_o και T_o
3. Υπολογισμός των παραμέτρων εξομάλυνσης.
   - Χρήση γραμμικής μεθόδου αναζήτησης βέλτιστων παραμέτρων εξομάλυνσης ή της μεθόδου grid search.

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου με Πολ/κή Εποχιακότητα

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές

$$h_1 = 0.1, \qquad h_3 = 0.01$$

Time t	Data X_t	Forecast $\hat{X}_{t-1}(1)$	Error e_t	Deseasonalized Level at End of t: $S_t = S_{t-1} + h_1 e_t / I_{t-p}$	Seasonal Index at End of t: $I_t = I_{t-p} + h_3 e_t / S_t$	Forecast for $t+1$: $\hat{X}_t(1) = S_t(I_{t-p+1})$
−3					I_{-3} = 0.6122	
−2					I_{-2} = 1.0086	
−1					I_{-1} = 1.3303	
0				S_0 = 74.3	I_0 = 1.0489	$\hat{X}_0(1)$ = 74.3(0.6122) = 45.5
1	53.0	45.5	7.5	S_1 = 74.3 + 0.1(7.5)/ 0.6122 = 75.5	I_1 = 0.6122 + 0.01(7.5)/75.5 = 0.6132	$\hat{X}_1(1)$ = 75.5(1.0086) = 76.2
2	85.0	76.2	8.8	S_2 = 75.5 + 0.1(8.8)/ 1.0086 = 76.4	I_2 = 1.0086 + 0.01(8.8)/76.4 = 1.0098	$\hat{X}_2(1)$ = 76.4(1.3303) = 101.6
3	92.0	101.6	−9.6	S_3 = 76.4 + 0.1(−9.6)/ 1.3303 = 75.7	I_3 = 1.3303 + 0.01(−9.6)/75.7 = 1.3290	$\hat{X}_3(1)$ = 75.7(1.0489) = 79.4
4	78.0	79.4	−1.4	S_4 = 75.7 + 0.1(−1.4)/ 1.0489 = 75.5	I_4 = 1.0489 + 0.01(−1.4)/75.5 = 1.0487	$\hat{X}_4(1)$ = 75.5(0.6132) = 46.3
5	44.0	46.3	−2.3	S_5 = 75.5 + 0.1(−2.3)/ 0.6132 = 75.2	I_5 = 0.6132 + 0.01(−2.3)/75.2 = 0.6129	$\hat{X}_5$ = 5.2(1.0098) = 75.9
6	75.0	75.9	−0.9	S_6 = 75.2 + 0.1(−0.9)/ 1.0098 = 75.1	I_6 = 1.0098 + 0.01(−0.9)/75.1 = 1.0096	$\hat{X}_6(1)$ = 75.1(1.3290) = 99.8
7	102.0	99.8	2.2	S_7 = 75.1 + 0.1(2.2)/ 1.3290 = 75.2	I_7 = 1.3290 + 0.01(2.2)/75.2 = 1.3293	$\hat{X}_7(1)$ = 75.2(1.0487) = 78.9
8	60.0	78.9	−18.9	S_8 = 75.2 + 0.1(−18.9)/ 1.0487 = 73.4	I_8 = 1.0487 + 0.01(−18.9)/73.4 = 1.0461	$\hat{X}_8(1)$ = 73.4(0.6129) = 45.0
9	55.0	45.0	10.0	S_9 = 73.4 + 0.1(10.0)/ 0.6129 = 75.1	I_9 = 0.6129 + 0.01(10.0)/75.1 = 0.6142	$\hat{X}_9(1)$ = 75.1(1.0096) = 75.8
10	88.0	75.8	12.2	S_{10} = 75.1 + 0.1(12.2)/ 1.0096 = 76.3	I_{10} = 1.0096 + 0.01(12.2)/76.3 = 1.0112	$\hat{X}_{10}(1)$ = 76.3(1.3293) = 101.4
11	108.0	101.4	6.6	S_{11} = 76.3 + 0.1(6.6)/ 1.3293 = 76.8	I_{11} = 1.3293 + 0.01(6.6)/76.8 = 1.3302	$\hat{X}_{11}(1)$ = 76.8(1.0461) = 80.3
12	59.0	80.3	−21.3	S_{12} = 76.8 + 0.1(−21.3)/ 1.0461 = 74.7	I_{12} = 1.0461 + 0.01(−21.3)/74.7 = 1.0433	$\hat{X}_{12}(1)$ = 74.7(0.6142) = 45.9
13		45.9				

Επιλογή Μοντέλου

$$\text{Variance} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}{n}$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$$

Gardner & McKenzie (1988)

Περίπτωση	Χρονοσειρές	Προτεινόμενο Μοντέλο
A	Αρχικά δεδομένα	SES
B	Διαφορές 1ου βαθμού	Damped
C	Διαφορές 2ου βαθμού	Holt
D	Εποχιακές διαφορές 1ου βαθμού	Seasonal SES
E	Διαφορές 1ου βαθμού της D	Seasonal Damped
F	Διαφορές 2ου βαθμού της D	Seasonal Holt

FSU

Επιλογή Μοντέλου

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές

Περίοδος	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
t	Αρχικά Δεδομένα	First Differences	Second Differences	Seasonal Differences	First Differences of D
1	7460				
2	8670	1210			
3	8410	-260	-1470		
4	7865	-545	-285		
5	8055	190	735	595	
6	7360	-695	-885	-1310	-1905
7	6715	-645	50	-1695	-385
8	3805	-2910	-2265	-4060	-2365
9	7845	4040	6950	-210	3850
10	8250	405	-3635	890	1100
11	8285	35	-370	1570	680
12	7855	-430	-465	4050	2480
Variance	1665902	2788954	7810910	5875248	5051748

FSU

Ταξινόμηση των μεθόδων Εκθετικής Εξομάλυνσης

(N,N)	=	simple exponential smoothing
(A,N)	=	Holts linear method
(M,N)	=	Exponential trend method
(A_d,N)	=	additive damped trend method
(M_d,N)	=	multiplicative damped trend method
(A,A)	=	additive Holt-Winters method
(A,M)	=	multiplicative Holt-Winters method
(A_d,M)	=	Holt-Winters damped method

	Seasonal Component		
Trend	N	A	M
Component	(None)	(Additive)	(Multiplicative)
N (None)	(N,N)	(N,A)	(N,M)
A (Additive)	(A,N)	(A,A)	(A,M)
A_d (Additive damped)	(A_d,N)	(A_d,A)	(A_d,M)
M (Multiplicative)	(M,N)	(M,A)	(M,M)
M_d (Multiplicative damped)	(M_d,N)	(M_d,A)	(M_d,M)

Καινοτόμα state – space μοντέλων Εκθετική Εξομάλυνση

This is a example for a subtitle

- State space models

Κάθε μοντέλο περιλαμβάνει μία ποσοτική εξίσωση η οποία περιγράφει πως οι παρατηρήσεις και κάποιες εξισώσεις μετάβασης (οι οποίες περιγράφουν τα μη παρατηρούμενα στοιχεία των χρονοσειρών όπως τάση – επίπεδο κα εποχιακότητα) αλλάζουν διαχρονικά. Για κάθε μέθοδο υπάρχουν δύο μοντέλα:

  - Προσθετικά σφάλματα
  - Πολλαπλασιαστικά σφάλματα

Παράγουν ίδιες σημειακές προβλέψεις αλλά αλλάζουν τα διαστήματα εμπιστοσύνης αυτών.

ETS (Error, Trend, Seasonal) όπου οι πιθανές τιμές που λαμβάνουν είναι:
Error: {A,M}
Trend:{N,A,A_d,M,M_d}
Seasonal:{N,A,M}
Οπότε υπάρχουν 30 state space models.

Exponential Smoothing Using R

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές

```
ses(x, h=10,
level=c(80,95),
fan=FALSE,
initial=c("optimal","s
imple"), alpha=NULL,
...)

holt(x, h=10,
damped=FALSE,
level=c(80,95),
fan=FALSE,
initial=c("optimal",
"simple"),
exponential=FALSE,
alpha=NULL, beta=NULL,
...)
```

x	a numeric vector or time series
h	Number of periods for forecasting.
damped	If TRUE, use a damped trend.
seasonal	Type of seasonality in hw model. "additive" or "multiplicative"
level	Confidence level for prediction intervals.
fan	If TRUE, level is set to seq(50,99,by=1). This is suitable for fan plots.
initial	Method used for selecting initial state values. If optimal, the initial values are optimized along with the smoothing parameters using ets. If simple, the initial values are set to values obtained using simple calculations on the first few observations. See Hyndman & Athanasopoulos (2012) for details.
exponential	If TRUE, an exponential trend is fitted. Otherwise, the trend is (locally) linear.
alpha	Value of smoothing parameter for the level. If NULL, it will be estimated.
beta	Value of smoothing parameter for the trend. If NULL, it will be estimated.
gamma	Value of smoothing parameter for the seasonal component. If NULL, it will be estimated.
...	Other arguments passed to forecast.ets.

Exponential Smoothing Using R


```
 ses(x, h=10,
level=c(80,95),
fan=FALSE,
initial=c("optimal","s
imple"), alpha=NULL,
...)
```

```
holt(x, h=10,
damped=FALSE,
level=c(80,95),
fan=FALSE,
initial=c("optimal",
"simple"),
exponential=FALSE,
alpha=NULL, beta=NULL,
...)
```

An object of class "forecast" is a list containing at least the following elements:

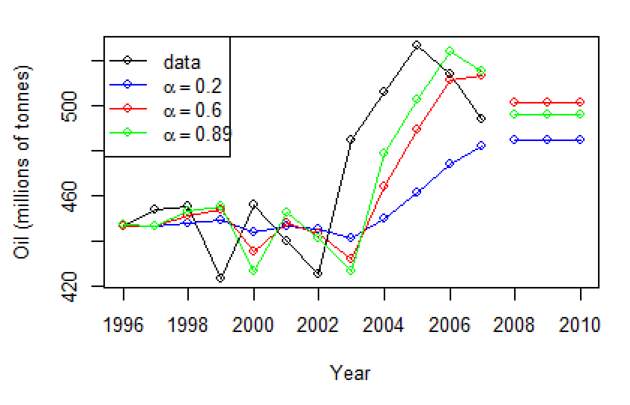
model	A list containing information about the fitted model
method	The name of the forecasting method as a character string
mean	Point forecasts as a time series
lower	Lower limits for prediction intervals
upper	Upper limits for prediction intervals
level	The confidence values associated with the prediction intervals
x	The original time series (either object itself or the time series used to create the model stored as object).
residuals	Residuals from the fitted model. That is x minus fitted values.
fitted	Fitted values (one-step forecasts)

FSU

Exponential Smoothing Using R

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές

```
oildata <- window(oil,start=1996,end=2007)
fit1 <- ses(oildata, alpha=0.2, initial="simple", h=3)
fit2 <- ses(oildata, alpha=0.6, initial="simple", h=3)
fit3 <- ses(oildata, h=3)
plot(fit1, plot.conf=FALSE, ylab="Oil (millions of tonnes)",
     xlab="Year", main="", fcol="white", type="o")
lines(fitted(fit1), col="blue", type="o")
lines(fitted(fit2), col="red", type="o")
lines(fitted(fit3), col="green", type="o")
lines(fit1$mean, col="blue", type="o")
lines(fit2$mean, col="red", type="o")
lines(fit3$mean, col="green", type="o")
legend("topleft",lty=1, col=c(1,"blue","red","green"),
       c("data", expression(alpha == 0.2), expression(alpha == 0.6),
         expression(alpha == 0.89)),pch=1)
```



FSU

Exponential Smoothing Using R

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές

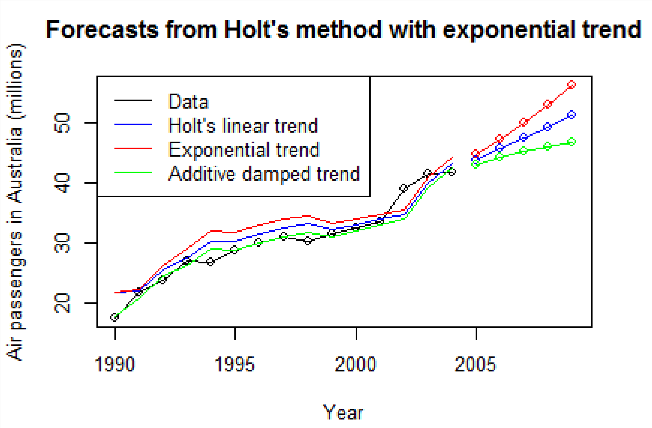
```
air <- window(ausair,start=1990,end=2004)
fit1 <- holt(air, alpha=0.8, beta=0.2, initial="simple",
h=5)
fit2 <- holt(air, alpha=0.8, beta=0.2, initial="simple",
exponential=TRUE, h=5)
# Results for first model:
fit1$model$state
fitted(fit1)
fit1$mean
```

```
> fitted(fit1)
Time Series:
Start = 1990
End = 2004
Frequency = 1
 [1] 21.86010 22.03237 25.48462 27.54059 30.28813 30.26106 3
1.58122 32.59923 33.24224 32.26755 33.07776 33.95807 34.7770
8
[14] 40.05535 43.21586
> fit1$mean
Time Series:
Start = 2005
End = 2009
Frequency = 1
[1] 43.75697 45.59352 47.43008 49.26663 51.10319
```

```
> fit1$model$state
Time Series:
Start = 1989
End = 2004
Frequency = 1
            l        b
1989 17.55340 4.306700
1990 18.41474 3.617628
1991 21.89455 3.590065
1992 24.20620 3.334382
1993 27.05156 3.236576
1994 27.56843 2.692635
1995 29.11733 2.463889
1996 30.37632 2.222910
1997 31.28265 1.959592
1998 30.79701 1.470546
1999 31.71727 1.360489
2000 32.67761 1.280459
2001 33.57353 1.203552
2002 38.17268 1.882672
2003 41.12022 2.095644
2004 41.92041 1.836555
```

Exponential Smoothing Using R


```
fit3 <- holt(air, alpha=0.8, beta=0.2,
damped=TRUE, initial="simple", h=5)
plot(fit2, type="o", ylab="Air passengers in
Australia (millions)", xlab="Year",
fcol="white", plot.conf=FALSE)
lines(fitted(fit1), col="blue")
lines(fitted(fit2), col="red")
lines(fitted(fit3), col="green")
lines(fit1$mean, col="blue", type="o")
lines(fit2$mean, col="red", type="o")
lines(fit3$mean, col="green", type="o")
legend("topleft",
lty=1, col=c("black","blue","red","green"),
c("Data","Holt's linear trend","Exponential
trend","Additive damped trend"))
```



Παράδειγμα Using R

Χρησιμοποιείστε το dataset “livestock” με ετήσια δεδομένα από το 1970 έως το 2000. Εφαρμόστε σε αυτό τις εξής μεθόδους Εκθετικής εξομάλυνσης: ses, holt, damped. Συγκρίνεται τις τιμές των παραμέτρων εξομάλυνσης που έχουν χρησιμοποιηθεί και αποφανθείτε σχετικά με την ακρίβεια του μοντέλου στο δείγμα. Έπειτα σχεδιάστε τα δεδομένα όπως και τις παραχθείσες προβλέψεις.

Άσκηση (1/2)

Χρησιμοποιείστε το dataset “books” το οποίο περιλαμβάνει ημερήσιες πωλήσεις paperback και hardcover βιβλίων. Σκοπός είναι να παράξετε ημερήσιες προβλέψεις για τις επόμενες 4 ημέρες και για τις δύο χρονοσειρές.

- Σχεδιάστε τις χρονοσειρές και αναφέρατε τα ποιοτικά χαρακτηριστικά που παρατηρείτε
- Χρησιμοποιήστε την εκθετική εξομάλυνση σταθερού επιπέδου (ses, initial=”simple”) με διαφορετικές τιμές της σταθεράς α και σημειώστε ποια τιμή της παραμέτρου έχει το μικρότερο SSE.
- Χρησιμοποιήστε την βέλτιστη τιμή της παραμέτρου που διαλέγου αυτόματα η μέθοδος ses, και παράγετε προβλέψεις για τις επόμενες 4 ημέρες για τη χρονοσειρά των paperbacks.
- Κάντε την ίδια διαδικασία χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ses, initial=“optimal”. Ποια είναι η επίδραση της διαφορετικής αρχικοποίησης του επιπέδου?
- Επαναλάβατε τα τρία τελευταία ερωτήματα και για την χρονοσειρά των hardcopies.

Άσκηση (2/2)

Εφαρμόστε τη μέθοδο εκθετικής εξομάλυνσης γραμμικής τάσης (Holt's) για να παράγετε ημερήσιες προβλέψεις για τις επόμενες 4 ημέρες, για τις χρονοσειρές paperback και hardcovers, από το dataset books, αντίστοιχα.

- Συγκρίνετε τις τιμές του SSE που προκύπτουν από της εφαρμογή της μεθόσου holt με τις τις τιμές που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου ses στην προηγούμενη άσκηση. Έπειτα συγκρίνετε τις παραχθείσες προβλέψεις από της εφαρμογή των δύο μεθόδων σε κάθε μία από τις χρονοσειρές (paperback, hardcovers). Ποια μέθοδο θεωρείτε καλύτερη; Αιτιολογείστε.

Further Reading

- https://www.otexts.org/fpp/7/7
- Επιχειρησιακές Προβλέψεις, Πετρόπουλος Φ., Ασημακόπουλος Β., Αθήνα 2012
- Gardner Jr, E. S. (1985). Exponential smoothing: The state of the art. *Journal of Forecasting* **4**(1), 1–28.
- Gardner Jr, E. S. (2006). Exponential smoothing: The state of the art—Part II.*International Journal of Forecasting* **22**(4), 637–666.
- Hyndman, R. J., A. B. Koehler, J. K. Ord and R. D. Snyder (2008). *Forecasting with exponential smoothing: the state space approach*. Berlin: Springer-Verlag.

Feel free to say hi!

We are friendly and social

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφος
Αττική, 15780, Ελλάδα
E-mail: info(at)fsu.gr
Τηλέφωνο: 2107723637 Fax: 2107723740

Κτίριο της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
2ος όροφος - 2.2.1 Εργαστήριο

@FSU NTUA

Μονάδα Προβλέψεων και Στρατηγικής ΕΜΠ

lesson@fsu.gr

FSU