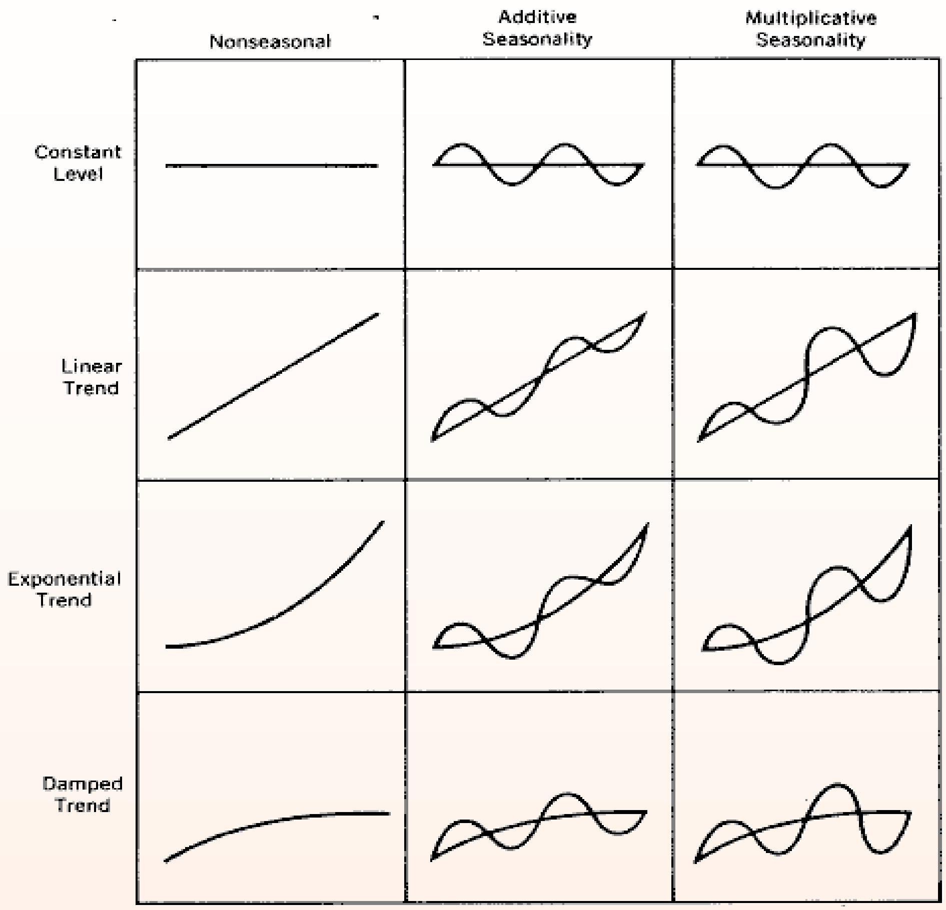
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Μονάδα Προβλέψεων & Στρατηγικής
Forecasting & StrategyUnit

Τεχνικές Προβλέψεων

Εκθετική Εξομάλυνση (II)

http://www.fsu.gr - lesson@fsu.gr

Τύποι Μοντέλων Εξομάλυνσης



- **Σταθερού Επιπέδου**
  - Για πρόβλεψη ενός βήματος.
  - Για χρονοσειρές που περιέχουν υψηλό θόρυβο ή τυχαιότητα.
- **Γραμμικής τάσης**
  - Για σταθερή αύξηση στο μέλλον.
- **Εκθετικής τάσης**
  - Για εκθετική αύξηση στο μέλλον (π.χ. στις αρχές του κύκλου ζωής ενός προϊόντος).
  - Είναι υπεραισιόδοξες για μακροπρόθεσμες προβλέψεις.
- **Φθίνουσας τάσης**
  - Για μεσοπρόθεσμες προβλέψεις.

FSU

Μοντέλο Γραμμικής Τάσης

(Holt)

$$e_t = Y_t - F_t$$

$$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + \alpha \cdot e_t$$

$$T_t = T_{t-1} + a \cdot \beta \cdot e_t$$

$$F_{t+m} = S_t + m \cdot T_t$$

- Χρειάζεται προσοχή στην αρχικοποίηση του μοντέλου.
- Πρέπει να εκτελείται μία γραμμική παλινδρόμηση, με το χρόνο ως ανεξάρτητη μεταβλητή. $X = A + B \cdot t$

- Ως αρχικό επίπεδο *συνήθως* ορίζεται η σταθερά A της παλινδρόμησης.
- Ως αρχική τάση *συνήθως* ορίζεται η κλίση B της παλινδρόμησης.

Οι συντελεστές α και β πρέπει να υπολογίζονται, ώστε να ελαχιστοποιείται *συνήθως* το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), όπου $0<\alpha<1$, $0<\beta<a$

FSU

Μοντέλο Γραμμικής Τάσης (Holt)

Η αρχικοποίηση του επιπέδου αλλά και της τάσης θα μπορούσε να γίνει εναλλακτικά ως εξής:

- **Αρχικό Επίπεδο**
  - Πρώτη Παρατήρηση
  - Μέσος Όρος Ν πρώτων παρατηρήσεων

- **Αρχική Τάση**
  - Διαφορά δεύτερης και πρώτης παρατήρησης: $(X_2 - X_1)$
  - Διαφορά ν-στής και πρώτης παρατήρησης διαιρεμένης με ν-1: $(X_4 - X_1)/3$

FSU

Μοντέλο Γραμμικής Τάσης

Παράδειγμα Βιβλίου (σελ. 2.24)

$$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + \alpha \cdot e_t \qquad F_{t+m} = S_t + m \cdot T_t$$

$$T_t = T_{t-1} + a \cdot \beta \cdot e_t$$

$$e_t = Y_t - F_t$$

$h_1 = 0.20,\ h_2 = 0.10$

Time t	Data X_t	Forecast $X_{t-1}(1)$	Error e_t	Level at End of t $S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + h_1 e_t$	Trend at End of t $T_t = T_{t-1} + a \cdot \beta \cdot e_t$	Forecast for $t+1$ $\hat{X}_t(1) = S_t + T_t$
0				$S_0 = 54.0$	$T_0 = 2.0$	$\hat{X}_0(1) = 54.0 + 2.0 = 56.0$
1	54.0	56.0	−2.0	$S_1 = 54.0 + 2.0 + 0.2(-2.0) = 55.6$	$T_1 = 2.0 + 0.1(-2.0) = 1.8$	$\hat{X}_1(1) = 55.6 + 1.8 = 57.4$
2	55.0	57.4	−2.4	$S_2 = 55.6 + 1.8 + 0.2(-2.4) = 56.9$	$T_2 = 1.8 + 0.1(-2.4) = 1.6$	$\hat{X}_2(1) = 56.9 + 1.6 = 58.5$
3	57.0	58.5	−1.5	$S_3 = 56.9 + 1.6 + 0.2(-1.5) = 58.2$	$T_3 = 1.6 + 0.1(-1.5) = 1.5$	$\hat{X}_3(1) = 58.2 + 1.5 = 59.7$
4	60.0	59.7	0.3	$S_4 = 58.2 + 1.5 + 0.2(0.3) = 59.8$	$T_4 = 1.5 + 0.1(0.3) = 1.5$	$\hat{X}_4(1) = 59.8 + 1.5 = 61.3$
5	66.0	61.3	4.7	$S_5 = 59.8 + 1.5 + 0.2(4.7) = 62.2$	$T_5 = 1.5 + 0.1(4.7) = 2.0$	$\hat{X}_5(1) = 62.2 + 2.0 = 64.2$
6	62.0	64.2	−2.2	$S_6 = 62.2 + 2.0 + 0.2(-2.2) = 63.8$	$T_6 = 2.0 + 0.1(-2.2) = 1.8$	$\hat{X}_6(1) = 63.8 + 1.8 = 65.6$
7	59.0	65.6	−6.6	$S_7 = 63.8 + 1.8 + 0.2(-6.6) = 64.3$	$T_7 = 1.8 + 0.1(-6.6) = 1.1$	$\hat{X}_7(1) = 64.3 + 1.1 = 65.4$
8	65.0	65.4	−0.4	$S_8 = 64.3 + 1.1 + 0.2(-0.4) = 65.3$	$T_8 = 1.1 + 0.1(-0.4) = 1.1$	$\hat{X}_8(1) = 65.3 + 1.1 = 66.4$
9	69.0	66.4	2.6	$S_9 = 65.3 + 1.1 + 0.2(2.6) = 66.9$	$T_9 = 1.1 + 0.1(2.6) = 1.4$	$\hat{X}_9(1) = 66.9 + 1.4 = 68.3$
10	70.0	68.3	1.7	$S_{10} = 66.9 + 1.4 + 0.2(1.7) = 68.6$	$T_{10} = 1.4 + 0.1(1.7) = 1.6$	$\hat{X}_{10}(1) = 68.6 + 1.6 = 70.2$
11	63.0	70.2	−7.2	$S_{11} = 68.6 + 1.6 + 0.2(-7.2) = 68.8$	$T_{11} = 1.6 + 0.1(-7.2) = 0.9$	$\hat{X}_{11}(1) = 68.8 + 0.9 = 69.7$
12	75.0	69.7	5.3	$S_{12} = 68.8 + 0.9 + 0.2(5.3) = 70.8$	$T_{12} = 0.9 + 0.1(5.3) = 1.4$	$\hat{X}_{12}(1) = 70.8 + 1.4 = 72.2$
13		72.2				

Μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης

(Damped)

$$e_t = Y_t - F_t$$

$$S_t = S_{t-1} + \varphi \cdot T_{t-1} + \alpha \cdot e_t$$

$$T_t = \varphi \cdot T_{t-1} + a \cdot \beta \cdot e_t$$

$$F_{t+m} = S_t + \sum_{i=1}^{m} \varphi^i \cdot T_t$$

- Χρειάζεται προσοχή στην αρχικοποίηση του μοντέλου.
- Πρέπει να εκτελείται μία γραμμική παλινδρόμηση, με το χρόνο ως ανεξάρτητη μεταβλητή. $X = A + B \cdot t$

- Ως αρχικό επίπεδο ορίζεται η σταθερά Α της παλινδρόμησης.
- Ως αρχική τάση ορίζεται η κλίση Β της παλινδρόμησης.

- Οι συντελεστές $h_1(=\alpha)$, $h_2(=\beta)$ και φ πρέπει να υπολογίζονται, ώστε να ελαχιστοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), με $0<\alpha<1$, $0<\beta<a$

Μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης
(Damped)

- Το μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα αυτόματο μοντέλο πρόβλεψης για κάθε μη εποχιακή χρονοσειρά, ανάλογα με τον damping factor που θα επιλέξουμε:

  - $\phi \approx 0$, σταθερού επιπέδου
  - $\phi < 1$, φθίνουσας τάσης
  - $\phi \approx 1$, γραμμικής τάσης
  - $\phi > 1$, εκθετικής τάσης

FSU

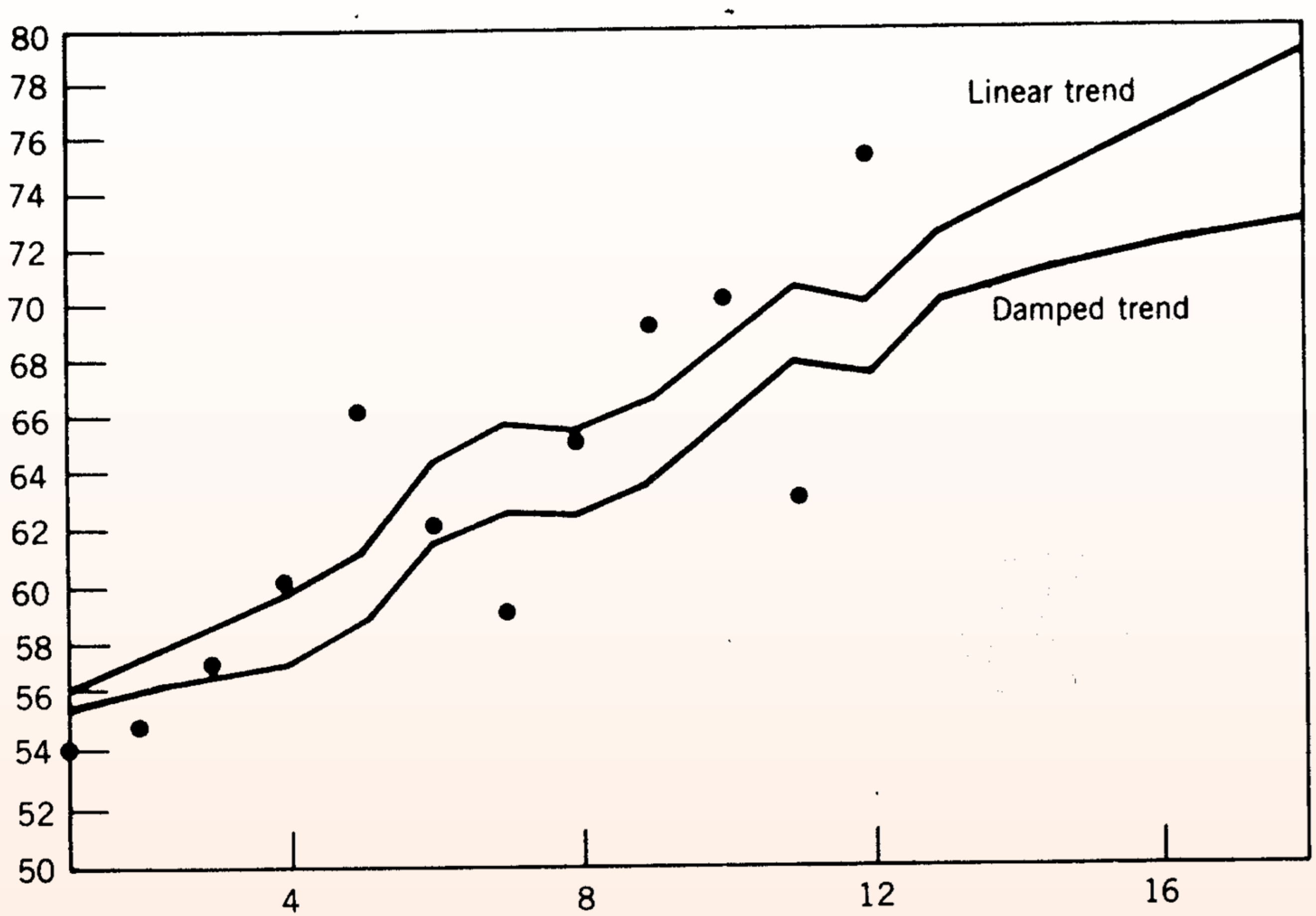
Μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης

Παράδειγμα Βιβλίου (σελ. 2.26)

$h_1 = 0.2, \qquad h_2 = 0.1, \qquad \varphi = 0.8$

Time t	Data X_t	Forecast $X_{t-1}(1)$	Error e_t	Level at End of t $S_t = S_{t-1} + \phi T_{t-1} + h_1 e_t$	Trend at End of t $T_t = \varphi \cdot T_{t-1} + a \cdot \beta \cdot e_t$	Forecast for $t+1$ $\hat{X}_t(1) = S_t + \phi T_t$
0				$S_0 = 54.0$	$T_0 = 2.0$	$\hat{X}_0(1) = 54.0 + 0.8(2.0) = 55.6$
1	54.0	55.6	−1.6	$S_1 = 54.0 + 0.8(2.0) + 0.2(-1.6) = 55.3$	$T_1 = 0.8(2.0) + 0.1(-1.6) = 1.4$	$\hat{X}_1(1) = 55.3 + 0.8(1.4) = 56.4$
2	55.0	56.4	−1.4	$S_2 = 55.3 + 0.8(1.4) + 0.2(-1.4) = 56.1$	$T_2 = 0.8(1.4) + 0.1(-1.4) = 1.0$	$\hat{X}_2(1) = 56.1 + 0.8(1.0) = 56.9$
3	57.0	56.9	0.1	$S_3 = 56.1 + 0.8(1.0) + 0.2(0.1) = 56.9$	$T_3 = 0.8(1.0) + 0.1(0.1) = 0.8$	$\hat{X}_3(1) = 56.9 + 0.8(0.8) = 57.5$
4	60.0	57.5	2.5	$S_4 = 56.9 + 0.8(0.8) + 0.2(2.5) = 58.0$	$T_4 = 0.8(0.8) + 0.1(2.5) = 0.9$	$\hat{X}_4(1) = 58.0 + 0.8(0.9) = 58.7$
5	66.0	58.7	7.3	$S_5 = 58.0 + 0.8(0.9) + 0.2(7.3) = 60.2$	$T_5 = 0.8(0.9) + 0.1(7.3) = 1.5$	$\hat{X}_5(1) = 60.2 + 0.8(1.5) = 61.4$
6	62.0	61.4	0.6	$S_6 = 60.2 + 0.8(1.5) + 0.2(0.6) = 61.5$	$T_6 = 0.8(1.5) + 0.1(0.6) = 1.3$	$\hat{X}_6(1) = 61.5 + 0.8(1.3) = 62.5$
7	59.0	62.5	−3.5	$S_7 = 61.5 + 0.8(1.3) + 0.1(-3.5) = 61.8$	$T_7 = 0.8(1.3) + 0.1(-3.5) = 0.7$	$\hat{X}_7(1) = 61.8 + 0.8(0.7) = 62.4$
8	65.0	62.4	2.6	$S_8 = 61.8 + 0.8(0.7) + 0.2(2.6) = 62.9$	$T_8 = 0.8(0.7) + 0.1(2.6) = 0.8$	$\hat{X}_8(1) = 62.9 + 0.8(0.8) = 63.5$
9	69.0	63.5	5.5	$S_9 = 62.9 + 0.8(0.8) + 0.2(5.5) = 64.6$	$T_9 = 0.8(0.8) + 0.1(5.5) = 1.2$	$\hat{X}_9(1) = 64.6 + 0.8(1.2) = 65.6$
10	70.0	65.6	4.4	$S_{10} = 64.6 + 0.8(1.2) + 0.2(4.4) = 66.5$	$T_{10} = 0.8(1.2) + 0.1(4.4) = 1.4$	$\hat{X}_{10}(1) = 66.5 + 0.8(1.4) = 67.6$
11	63.0	67.6	−4.6	$S_{11} = 66.5 + 0.8(1.4) + 0.2(-4.6) = 66.7$	$T_{11} = 0.8(1.4) + 0.1(-4.6) = 0.7$	$\hat{X}_{11}(1) = 66.7 + 0.8(0.7) = 67.3$
12	75.0	67.3	7.7	$S_{12} = 66.7 + 0.8(0.7) + 0.2(7.7) = 68.8$	$T_{12} = 0.8(0.7) + 0.1(7.7) = 1.3$	$\hat{X}_{12}(1) = 68.8 + 0.8(1.3) = 69.8$
13		69.8				

Σύγκριση Μοντέλων Γραμμικής & Μη Γραμμικής Τάσης



Εποχιακή Εξομάλυνση

- Αν τα δεδομένα έχουν εποχιακό πρότυπο, τότε στα μη εποχιακά μοντέλα προστίθεται ένας εποχιακός παράγοντας (index) για κάθε περίοδο του έτους.
    - Αφαίρεση Προσθετικής Εποχιακότητας
        - actual data - index = deseasonalized data
    - Αφαίρεση Πολλαπλασιαστικής Εποχιακότητας
        - actual data / index = deseasonalized data

    - Προσθετική Εποχιακότητα
        - actual data + index = deseasonalized data
    - Πολλαπλασιαστική Εποχιακότητα
        - actual data * index = deseasonalized data

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου με Πολ/κή Εποχιακότητα

$$e_t = Y_t - F_t$$

$$S_t = S_{t-1} + \frac{\alpha \cdot e_t}{I_{t-p}}$$

$$I_t = I_{t-p} + \frac{\gamma \cdot e_t}{S_t}$$

$$F_{t+m} = S_t \cdot I_{t-p+m}$$

Αρχικοποίηση μοντέλου

1. Υπολογισμός αρχικών εποχιακών συντελεστών.
   - Χρήση μοντέλου αποσύνθεσης.
2. Υπολογισμός S_o και T_o
3. Υπολογισμός των παραμέτρων εξομάλυνσης.
   - Χρήση γραμμικής μεθόδου αναζήτησης βέλτιστων παραμέτρων εξομάλυνσης ή της μεθόδου grid search.

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου με Πολ/κή Εποχιακότητα

$h_1 = 0.1, \qquad h_3 = 0.01$

Time t	Data X_t	Forecast $\hat{X}_{t-1}(1)$	Error e_t	Deseasonalized Level at End of t: $S_t = S_{t-1} + h_1 e_t / I_{t-p}$	Seasonal Index at End of t: $I_t = I_{t-p} + h_3 e_t / S_t$	Forecast for $t+1$: $\hat{X}_t(1) = S_t(I_{t-p+1})$
−3					$I_{-3} = 0.6122$	
−2					$I_{-2} = 1.0086$	
−1					$I_{-1} = 1.3303$	
0				$S_0 = 74.3$	$I_0 = 1.0489$	$\hat{X}_0(1) = 74.3(0.6122) = 45.5$
1	53.0	45.5	7.5	$S_1 = 74.3 + 0.1(7.5)/0.6122 = 75.5$	$I_1 = 0.6122 + 0.01(7.5)/75.5 = 0.6132$	$\hat{X}_1(1) = 75.5(1.0086) = 76.2$
2	85.0	76.2	8.8	$S_2 = 75.5 + 0.1(8.8)/1.0086 = 76.4$	$I_2 = 1.0086 + 0.01(8.8)/76.4 = 1.0098$	$\hat{X}_2(1) = 76.4(1.3303) = 101.6$
3	92.0	101.6	−9.6	$S_3 = 76.4 + 0.1(-9.6)/1.3303 = 75.7$	$I_3 = 1.3303 + 0.01(-9.6)/75.7 = 1.3290$	$\hat{X}_3(1) = 75.7(1.0489) = 79.4$
4	78.0	79.4	−1.4	$S_4 = 75.7 + 0.1(-1.4)/1.0489 = 75.5$	$I_4 = 1.0489 + 0.01(-1.4)/75.5 = 1.0487$	$\hat{X}_4(1) = 75.5(0.6132) = 46.3$
5	44.0	46.3	−2.3	$S_5 = 75.5 + 0.1(-2.3)/0.6132 = 75.2$	$I_5 = 0.6132 + 0.01(-2.3)/75.2 = 0.6129$	$\hat{X}_5 = 5.2(1.0098) = 75.9$
6	75.0	75.9	−0.9	$S_6 = 75.2 + 0.1(-0.9)/1.0098 = 75.1$	$I_6 = 1.0098 + 0.01(-0.9)/75.1 = 1.0096$	$\hat{X}_6(1) = 75.1(1.3290) = 99.8$
7	102.0	99.8	2.2	$S_7 = 75.1 + 0.1(2.2)/1.3290 = 75.2$	$I_7 = 1.3290 + 0.01(2.2)/75.2 = 1.3293$	$\hat{X}_7(1) = 75.2(1.0487) = 78.9$
8	60.0	78.9	−18.9	$S_8 = 75.2 + 0.1(-18.9)/1.0487 = 73.4$	$I_8 = 1.0487 + 0.01(-18.9)/73.4 = 1.0461$	$\hat{X}_8(1) = 73.4(0.6129) = 45.0$
9	55.0	45.0	10.0	$S_9 = 73.4 + 0.1(10.0)/0.6129 = 75.1$	$I_9 = 0.6129 + 0.01(10.0)/75.1 = 0.6142$	$\hat{X}_9(1) = 75.1(1.0096) = 75.8$
10	88.0	75.8	12.2	$S_{10} = 75.1 + 0.1(12.2)/1.0096 = 76.3$	$I_{10} = 1.0096 + 0.01(12.2)/76.3 = 1.0112$	$\hat{X}_{10}(1) = 76.3(1.3293) = 101.4$
11	108.0	101.4	6.6	$S_{11} = 76.3 + 0.1(6.6)/1.3293 = 76.8$	$I_{11} = 1.3293 + 0.01(6.6)/76.8 = 1.3302$	$\hat{X}_{11}(1) = 76.8(1.0461) = 80.3$
12	59.0	80.3	−21.3	$S_{12} = 76.8 + 0.1(-21.3)/1.0461 = 74.7$	$I_{12} = 1.0461 + 0.01(-21.3)/74.7 = 1.0433$	$\hat{X}_{12}(1) = 74.7(0.6142) = 45.9$
13		45.9				

Επιλογή Μοντέλου

Gardner & McKenzie (1988)

Περίπτωση	Χρονοσειρές	Προτεινόμενο Μοντέλο
A	Αρχικά δεδομένα	SES
B	Διαφορές 1ου βαθμού	Damped
C	Διαφορές 2ου βαθμού	Holt
D	Εποχιακές διαφορές 1ου βαθμού	Seasonal SES
E	Διαφορές 1ου βαθμού της D	Seasonal Damped
F	Διαφορές 2ου βαθμού της D	Seasonal Holt

$$\text{Variance} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}{n} \qquad \overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$$

FSU

Επιλογή Μοντέλου

Περίοδος	A	B	C	D	E
t	Αρχικά Δεδομένα	First Differences	Second Differences	Seasonal Differences	First Differences of D
1	7460				
2	8670	1210			
3	8410	-260	-1470		
4	7865	-545	-285		
5	8055	190	735	595	
6	7360	-695	-885	-1310	-1905
7	6715	-645	50	-1695	-385
8	3805	-2910	-2265	-4060	-2365
9	7845	4040	6950	-210	3850
10	8250	405	-3635	890	1100
11	8285	35	-370	1570	680
12	7855	-430	-465	4050	2480
Variance	1665902	2788954	7810910	5875248	5051748

FSU