ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Μονάδα Προβλέψεων & Στρατηγικής
Forecasting & Strategy Unit

Μέθοδος Εκθετικής Εξομάλυνσης

Διάλεξη 3

Στατιστική Πρόβλεψη

Μέθοδοι Εκθετικής Εξομάλυνσης

Αναπτύχθηκαν τις αρχές της δεκαετίας του ‘50. Από τότε έγιναν από τις πιο δημοφιλείς μεθόδους προβλέψεων μεταξύ των επιχειρηματιών κυρίως λόγω της ευκολίας χρήσης τους, της ελάχιστης απαίτησης σε υπολογιστικό χρόνο και την απαίτηση σχετικά λίγων παρατηρήσεων προκειμένου να παράγουν προβλέψεις. Οι μέθοδοι εξομάλυνσης είναι κατάλληλες για **βραχυπρόθεσμες** προβλέψεις ενός μεγάλου όγκου χρονοσειρών. Αποδίδουν καλύτερα σε δεδομένα που παρουσιάζουν στασιμότητα ή μικρό ρυθμό ανάπτυξης ή μείωσης ως προς το χρόνο.

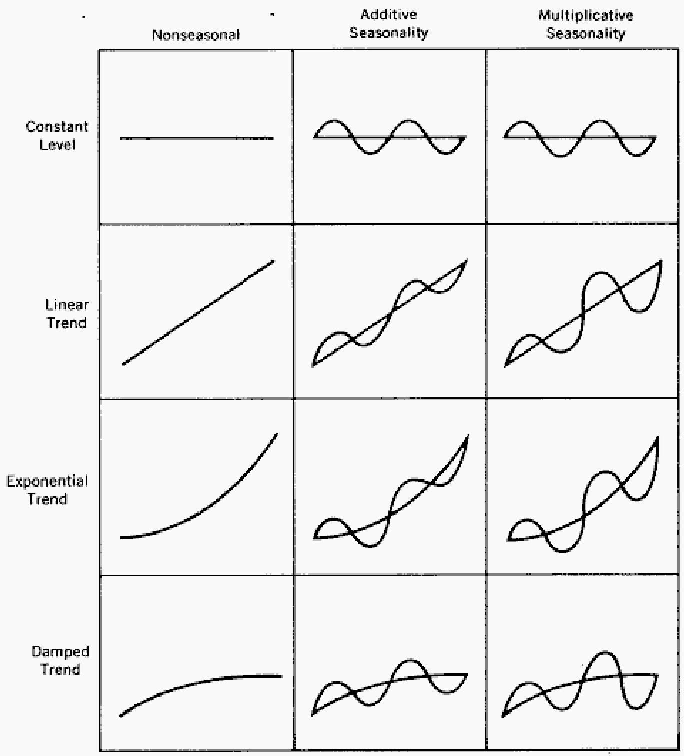
FSU

Εκθετική Εξομάλυνση
(Exponential Smoothing)

- Μέθοδος πρόβλεψης η οποία εξομαλύνει τα ιστορικά δεδομένα.
- Υπολογίζεται ο μέσος όρος των δεδομένων, με την χρήση συντελεστών βαρύτητας.
- Τα πιο πρόσφατα δεδομένα έχουν μεγαλύτερη βαρύτητα.
- Οι συντελεστές βαρύτητας μειώνονται με εκθετικό τρόπο, όσο παλαιότερα είναι τα δεδομένα.
- Στόχος η απομόνωση του προτύπου των δεδομένων από τις τυχαίες διακυμάνσεις.
- Χρησιμοποιείται ευρέως για βραχυπρόθεσμο σχεδιασμό.
- Είναι σχετικά εύκολη στην χρήση.
- Απαιτεί ελάχιστα ιστορικά δεδομένα και χρόνο υπολογισμού.
- Είναι ικανοποιητικά ακριβής σε σχέση με πολυπλοκότερες μεθόδους πρόβλεψης.

FSU

Τύποι Μοντέλων Εξομάλυνσης



- **Σταθερού Επιπέδου**
  - ✓ Για πρόβλεψη ενός βήματος.
  - ✓ Για χρονοσειρές που περιέχουν υψηλό θόρυβο ή τυχαιότητα.
- **Γραμμικής τάσης**
  - ✓ Για σταθερή αύξηση στο μέλλον.
- **Εκθετικής τάσης**
  - ✓ Για εκθετική αύξηση στο μέλλον (π.χ. στις αρχές του κύκλου ζωής ενός προϊόντος).
  - ✓ Είναι υπεραισιόδοξες για μακροπρόθεσμες προβλέψεις.
- **Φθίνουσας τάσης**
  - ✓ Για μεσοπρόθεσμες προβλέψεις.

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Χρόνος t	Δεδομένα X_t	Πρόβλεψη F $\hat{X}_{t-1}(1)$	Σφάλμα e_t	Επιπεδο στο τέλος της περιόδου t $S_t = S_{t-1} + h_1 e_t$
0				S0 = 585
1	545	585	-40	S1 = 585 + 0.4(-40) = 569
2	635	569	66	S2 = 569 + 0.4(6.6) = 595.4
3	420	595,4	-175,4	S3 = 595.4 + 0.4(-175.4) = 525.2
4	716	525,2	190,8	S4 = 525.2 + 0.4(190.8) = 601.5
5	699	601,5	97,5	S5 = 601.5 + 0.4(97,5) = 640.5
6	681	640,5	40,5	S6 = 640,5 + 0.4(40.5) = 656.5
7	763	656,5	106,3	S7 = 656.5 + 0.4(106.3) = 699.2
8	778	699,2	78,8	S8 = 699.2 + 0.4(78.8) = 730.5
9	690	730,5	-40,5	S9 = 730.5 + 0.4(-40.5) = 711.4
10	707	711,4	-7,4	S10 = 711.4 + 0.4(-7.4) = 711.5
11	716	711,5	4,5	S11 = 711.5 + 0.4(4.5) = 713.3
12		713,3		

$$e_t = Y_t - F_t$$

$$S_t = S_{t-1} + \alpha \cdot e_t$$

$$F_{t+1} = S_t$$

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Εξίσωση Σφάλματος

$$e = Y_{t-1} - F_{t-1}$$

Εξίσωση Επιπέδου & Πρόβλεψης

$$F_t = F_{t-1} + \alpha e$$

$$F_t = F_{t-1} + \alpha(Y_{t-1} - F_{t-1})$$

$$F_t = \alpha Y_{t-1} + (1-\alpha)F_{t-1}$$

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Εξίσωση Σφάλματος

$$F_t = \alpha Y_{t-1} + (1-\alpha)F_{t-1}$$

Εξίσωση Επιπέδου & Πρόβλεψης

$$e = Y_{t-1} - F_{t-1}$$

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + (1-\alpha)F_t$$

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)\, Y_{t-1} + (1-\alpha)^2\, F_{t-1}$$

Ομοίως αντικαθιστώντας στην (3) το F_{t-1}, κ.ο.κ. , προκύπτει:

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)\, Y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2\, Y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3\, Y_{t-3}\, \alpha(1-\alpha)^4\, Y_{t-4} + \ldots$$

$$\ldots + \alpha(1-\alpha)^{t-1}\, Y_1 + (1-\alpha)^t F_1$$

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Από την εξίσωση (4) παρατηρούμε

- Ότι οι συντελεστές (βάρη) των των ιστορικών δεδομένων Y μειώνονται εκθετικά για αυτό και το όνομα της μεθόδου «εκθετική εξομάλυνση».
- Ότι ο τελευταίος όρος είναι ο $(1-\alpha)^t F_1$. Αυτό σημαίνει ότι η αρχική πρόβλεψη παίζει ρόλο σε όλες τις επόμενες προβλέψεις. Στο παράδειγμα μας υπολογίζονται τα βάρη για t = 11, ισχύει :

$(1-\alpha)^t = 0.3138$ αν $\alpha=0.1$

$(1-\alpha)^t = 0.0004$ αν $\alpha=0.5$

$(1-\alpha)^t = 0.0000$ αν $\alpha=0.9$

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

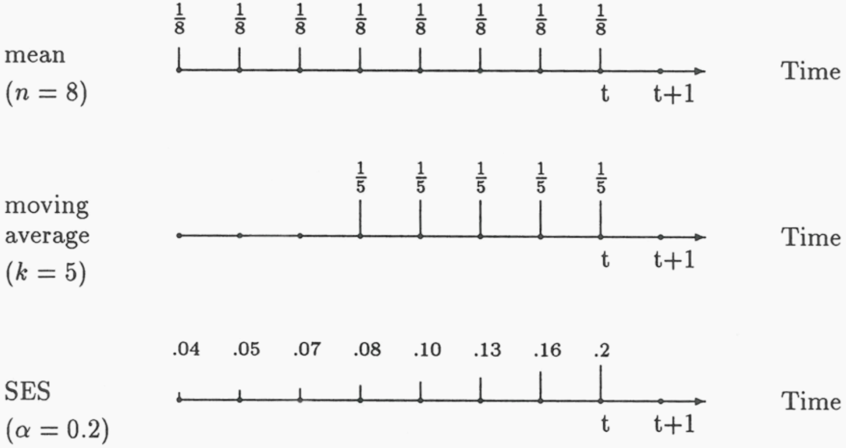
- ✓ Όσο μικρότερη τιμή του ***α*** επιλέξουμε τόσο μεγαλύτερο ρόλο παίζει η πρώτη τιμή της πρόβλεψης που θα επιλέξουμε F1.
- ✓ Όσο περισσότερα δεδομένα έχουμε τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του t, οπότε τόσο μικρότερο είναι το βάρος του F1.

Π.χ. για t = 12 και α=0.1 το βάρος ισούται με 0.2824

για t = 24 και α=0.1 το βάρος ισούται με 0.0798

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Weight assigned to:	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$
Y_t	0.2	0.4	0.6	0.8
Y_{t-1}	0.16	0.24	0.24	0.16
Y_{t-2}	0.128	0.144	0.096	0.032
Y_{t-3}	0.1024	0.0864	0.0384	0.0064
Y_{t-4}	$(0.2)(0.8)^4$	$(0.4)(0.6)^4$	$(0.6)(0.4)^4$	$(0.8)(0.2)^4$



Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

- ✓ Σαν αρχική πρόβλεψη συνήθως χρησιμοποιούμε:
  - ✓ Μέσος όρος των παρατηρήσεων
  - ✓ Μέσος όρος των τεσσάρων ή πέντε πρώτων παρατηρήσεων
  - ✓ Πρώτη παρατήρηση
  - ✓ Σταθερό επίπεδο από μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Εξομάλυνσης

- ✓ Η βέλτιστη τιμή του ***α*** καθορίζεται από την ελαχιστοποίηση του σφάλματος (MSE, MAPE ή άλλων)
- ✓ Το ***α*** μπορεί να είναι διαφορετικό όταν στοχεύουμε στην ελαχιστοποίηση του MSE, και άλλο για την ελαχιστοποίηση του MAPE, κλπ.
- ✓ Το ***α*** κυμαίνεται μεταξύ του διαστήματος [0,1].
- ✓ Υπολογίζουμε τα σφάλματα για κάθε τιμή του ***α***, για κάθε τιμή του δείγματος

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Εξομάλυνσης

✓ Ένας τρόπος για τη βελτιστοποίηση του α είναι ο υπολογισμόςτου MSE για κάποιο αριθμό τιμών του ***α*** (πχ 0.1, 0.2, ..., 0.9) και επιλογή εκείνου που δίνει το μικρότερο σφάλμα MSE.

✓ Εναλλακτικός τρόπος είναι η χρήση ενός μη γραμμικού αλγορίθμου βελτιστοποίησης.

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

Παράδειγμα

t	Y
0	
1	200
2	135
3	195
4	197,5
5	310
6	175
7	155
8	130
9	220
10	277,5
11	235
12	???

- Έστω μηνιαία χρονοσειρά Yt
- Ζητείται η πρόβλεψη για τον ερχόμενο Δεκέμβρη
- Αρχικοποιείται το επίπεδο ως ο Μ.Ο. των δύο πρώτων ιστορικών παρατηρήσεων
- Επιλέγεται παράμετρος εξομάλυνσης α=0.2

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

Παράδειγμα

t	Y	F	e	S = F + a*e	S = a*Y + (1-a)*F	St
0					Αρχικό Επίπεδο	**167,5**
1	200	167,5	32,5	167,5 + **0.2** * 32,5	0.2 * 200 + 0.8 * 167,5	174,0
2	135	174,0		Παράμετρος εξομάλυνσης		
3	195					
4	197,5					
5	310					
6	175					
7	155					
8	130					
9	220					
10	277,5					
11	235					
12	???					

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

Παράδειγμα

t	Y	F	e	S = F + a*e	S = a*Y + (1-a)*F	S
0						167,5
1	200	167,5	32,5	167,5 + 0.2 * 32,5	0.2 * 200 + 0.8 * 167,5	174,0
2	135	174,0	-39,0	174 + 0.2 * -39	0.2 * 135 + 0.8 * 174	166,2
3	195	166,2				
4	197,5	Πρόβλεψη				
5	310					
6	175					
7	155					
8	130					
9	220					
10	277,5					
11	235					
12	???					

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

Παράδειγμα

t	Y	F	e	S = F + a*e	S = a*Y + (1-a)*F	S
0						167,5
1	200	167,5	32,5	167,5 + 0.2 * 32,5	0.2 * 200 + 0.8 * 167,5	174,0
2	135	174,0	-39,0	174 + 0.2 * -39	0.2 * 135 + 0.8 * 174	166,2
3	195	166,2	28,8	166,2 + 0.2 * 28,8	0.2 * 195 + 0.8 * 166,2	172,0
4	197,5	172,0	25,5	172 + 0.2 * 25,5	0.2 * 197,5 + 0.8 * 172	177,1
5	310	177,1	132,9	177,1 + 0.2 * 132,9	0.2 * 310 + 0.8 * 177,1	203,7
6	175	203,7	-28,7	203,7 + 0.2 * -28,7	0.2 * 175 + 0.8 * 203,7	197,9
7	155	197,9	-42,9	197,9 + 0.2 * -42,9	0.2 * 155 + 0.8 * 197,9	189,3
8	130	189,3	-59,3	189,3 + 0.2 * -59,3	0.2 * 130 + 0.8 * 189,3	177,5
9	220	177,5	42,5	177,5 + 0.2 * 42,5	0.2 * 220 + 0.8 * 177,5	186,0
10	277,5	186,0	91,5	186 + 0.2 * 91,5	0.2 * 277,5 + 0.8 * 186	204,3
11	235	204,3	30,7	204,3 + 0.2 * 30,7	0.2 * 235 + 0.8 * 204,3	210,4
12	???	**210,4**	Τελική Πρόβλεψη			

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

Παράδειγμα

α = 0.5

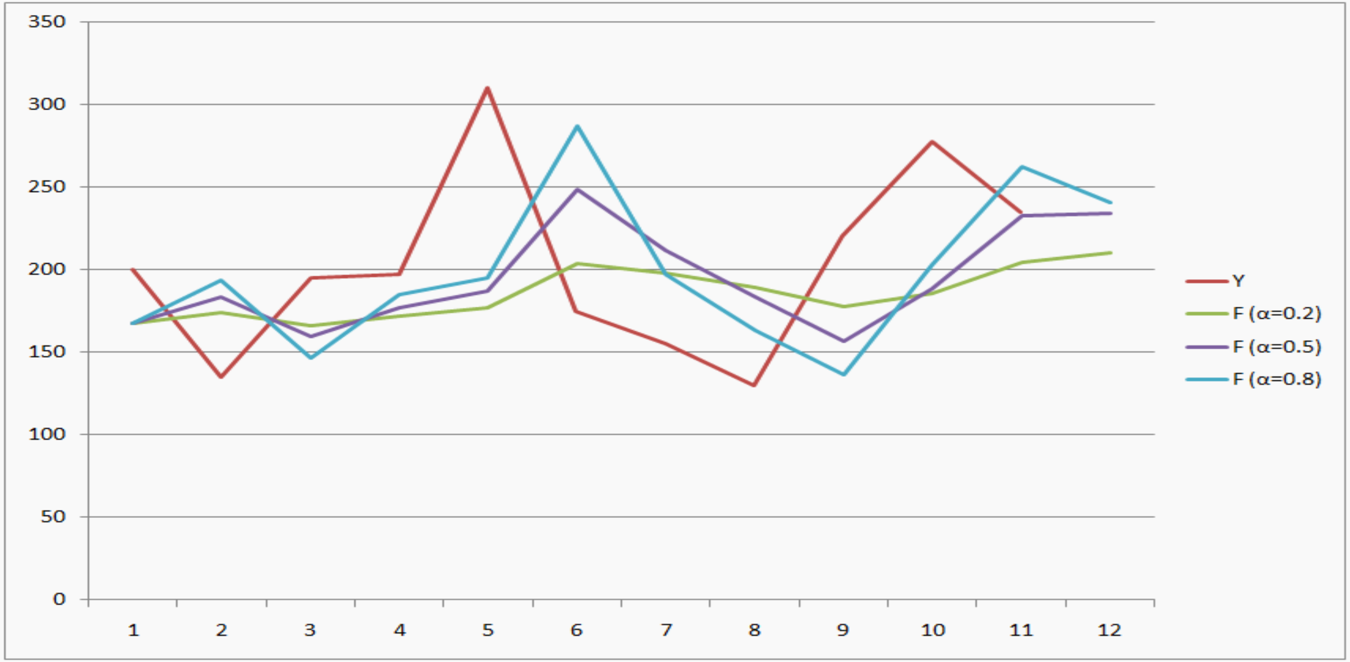
t	Y	F	e	S
0				167,5
1	200	167,5	32,5	183,8
2	135	183,8	-48,8	159,4
3	195	159,4	35,6	177,2
4	197,5	177,2	20,3	187,3
5	310	187,3	122,7	248,7
6	175	248,7	-73,7	211,8
7	155	211,8	-56,8	183,4
8	130	183,4	-53,4	156,7
9	220	156,7	63,3	188,4
10	277,5	188,4	89,1	232,9
11	235	232,9	2,1	234,0
12	???	234,0		

α = 0.8

t	Y	F	e	S
0				167,5
1	200	167,5	32,5	193,5
2	135	193,5	-58,5	146,7
3	195	146,7	48,3	185,3
4	197,5	185,3	12,2	195,1
5	310	195,1	114,9	287,0
6	175	287,0	-112,0	197,4
7	155	197,4	-42,4	163,5
8	130	163,5	-33,5	136,7
9	220	136,7	83,3	203,3
10	277,5	203,3	74,2	262,7
11	235	262,7	-27,7	240,5
12	???	240,5		

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

Παράδειγμα



Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

Παράδειγμα

Η μεγαλύτερη τιμή του α = (0.8) εξομαλύνει πολύ λίγο το μοντέλο ενώ η μικρότερη α= (0.2) δίνει την καλύτερη εξομάλυνση.

Αν το α = 1, τότε η εκθετική εξομάλυνση γίνεται Naive, ενώ αν α = 0 η πρόβλεψή είναι σταθερή και ίση με την αρχική πρόβλεψη

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

Παράδειγμα

t	Y	F (α=0.2)	E	AE	APE	SAPE
1	200	167,5	32,50	32,50	0,163	0,177
2	135	174,0	-39,00	39,00	0,289	0,252
3	195	166,2	28,80	28,80	0,148	0,159
4	197,5	172,0	25,54	25,54	0,129	0,138
5	310	177,1	132,93	132,93	0,429	0,546
6	175	203,7	-28,65	28,65	0,164	0,151
7	155	197,9	-42,92	42,92	0,277	0,243
8	130	189,3	-59,34	59,34	0,456	0,372
9	220	177,5	42,53	42,53	0,193	0,214
10	277,5	186,0	91,52	91,52	0,330	0,395
11	235	204,3	30,72	30,72	0,131	0,140
12		210,4				
		α=0.2	19,51	**50,41**	**0,25**	**0,25**
		α=0.5	12,08	54,39	0,27	0,27
		α=0.8	**8,30**	58,13	0,29	0,29

Μεγαλύτερη προκατάληψη

Καλύτερη ακρίβεια

Μοντέλο Γραμμικής Τάσης (Holt)

$$e_t = Y_t - F_t$$
$$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + a * e_t$$
$$T_t = T_{t-1} + a * b * e_t$$
$$\mathrm{F}_{t+m} = S_t + mT_t$$

Οι συντελεστές α και β πρέπει να υπολογίζονται, ώστε να ελαχιστοποιείται *συνήθως* το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), όπου
$0<\alpha<1$, $0<\beta<a$

- ✓ Χρειάζεται προσοχή στην αρχικοποίηση του μοντέλου.
- ✓ Πρέπει να εκτελείται μία γραμμική παλινδρόμηση, με το χρόνο ως ανεξάρτητη μεταβλητή.
- ✓ Ως αρχικό επίπεδο *συνήθως* ορίζεται η σταθερά Α της παλινδρόμησης.
- ✓ Ως αρχική τάση *συνήθως* ορίζεται η κλίση Β της παλινδρόμησης.

Μοντέλο Γραμμικής Τάσης (Holt)

$$e_t = Y_t - F_t$$
$$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + a * e_t$$
$$T_t = T_{t-1} + a * b * e_t$$
$$\mathrm{F}_{t+m} = S_t + mT_t$$

Οι συντελεστές α και β πρέπει να υπολογίζονται, ώστε να ελαχιστοποιείται *συνήθως* το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), όπου

$0<\alpha<1$, $0<\beta<a$

Η αρχικοποίηση του επιπέδου και της τάσης θα μπορούσε να γίνει *εναλλακτικά*:

- **Αρχικό Επίπεδο**
  - Πρώτη Παρατήρηση
  - Μέσος Όρος Ν πρώτων παρατηρήσεων
- **Αρχική Τάση**
  - Διαφορά δεύτερης και πρώτης παρατήρησης: (X_2-X_1)
  - Διαφορά ν-στής και πρώτης παρατήρησης διαιρεμένης με ν-1: $(X_4-X_1)/3$

FSU

Μοντέλο Γραμμικής Τάσης (Holt)

$e_t = Y_t - F_t$

$$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + \alpha \cdot e_t$$

$$T_t = T_{t-1} + \beta \cdot e_t$$

$$F_{t+m} = S_t + m \cdot T_t$$

$h_1 = 0.20,\ h_2 = 0.10$

Time t	Data X_t	Forecast $X_{t-1}(1)$	Error e_t	Level at End of t: $S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + h_1 e_t$	Trend at End of t: $T_t = T_{t-1} + h_2 e_t$	Forecast for $t+1$: $\hat{X}_t(1) = S_t + T_t$
0				$S_0 = 54.0$	$T_0 = 2.0$	$\hat{X}_0(1) = 54.0 + 2.0 = 56.0$
1	54.0	56.0	−2.0	$S_1 = 54.0 + 2.0 + 0.2(-2.0) = 55.6$	$T_1 = 2.0 + 0.1(-2.0) = 1.8$	$\hat{X}_1(1) = 55.6 + 1.8 = 57.4$
2	55.0	57.4	−2.4	$S_2 = 55.6 + 1.8 + 0.2(-2.4) = 56.9$	$T_2 = 1.8 + 0.1(-2.4) = 1.6$	$\hat{X}_2(1) = 56.9 + 1.6 = 58.5$
3	57.0	58.5	−1.5	$S_3 = 56.9 + 1.6 + 0.2(-1.5) = 58.2$	$T_3 = 1.6 + 0.1(-1.5) = 1.5$	$\hat{X}_3(1) = 58.2 + 1.5 = 59.7$
4	60.0	59.7	0.3	$S_4 = 58.2 + 1.5 + 0.2(0.3) = 59.8$	$T_4 = 1.5 + 0.1(0.3) = 1.5$	$\hat{X}_4(1) = 59.8 + 1.5 = 61.3$
5	66.0	61.3	4.7	$S_5 = 59.8 + 1.5 + 0.2(4.7) = 62.2$	$T_5 = 1.5 + 0.1(4.7) = 2.0$	$\hat{X}_5(1) = 62.2 + 2.0 = 64.2$
6	62.0	64.2	−2.2	$S_6 = 62.2 + 2.0 + 0.2(-2.2) = 63.8$	$T_6 = 2.0 + 0.1(-2.2) = 1.8$	$\hat{X}_6(1) = 63.8 + 1.8 = 65.6$
7	59.0	65.6	−6.6	$S_7 = 63.8 + 1.8 + 0.2(-6.6) = 64.3$	$T_7 = 1.8 + 0.1(-6.6) = 1.1$	$\hat{X}_7(1) = 64.3 + 1.1 = 65.4$
8	65.0	65.4	−0.4	$S_8 = 64.3 + 1.1 + 0.2(-0.4) = 65.3$	$T_8 = 1.1 + 0.1(-0.4) = 1.1$	$\hat{X}_8(1) = 65.3 + 1.1 = 66.4$
9	69.0	66.4	2.6	$S_9 = 65.3 + 1.1 + 0.2(2.6) = 66.9$	$T_9 = 1.1 + 0.1(2.6) = 1.4$	$\hat{X}_9(1) = 66.9 + 1.4 = 68.3$
10	70.0	68.3	1.7	$S_{10} = 66.9 + 1.4 + 0.2(1.7) = 68.6$	$T_{10} = 1.4 + 0.1(1.7) = 1.6$	$\hat{X}_{10}(1) = 68.6 + 1.6 = 70.2$
11	63.0	70.2	−7.2	$S_{11} = 68.6 + 1.6 + 0.2(-7.2) = 68.8$	$T_{11} = 1.6 + 0.1(-7.2) = 0.9$	$\hat{X}_{11}(1) = 68.8 + 0.9 = 69.7$
12	75.0	69.7	5.3	$S_{12} = 68.8 + 0.9 + 0.2(5.3) = 70.8$	$T_{12} = 0.9 + 0.1(5.3) = 1.4$	$\hat{X}_{12}(1) = 70.8 + 1.4 = 72$
13		72.2				

Μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης (Damped)

$$e_t = Y_t - F_t$$
$$S_t = S_{t-1} + \varphi T_{t-1} + a * e_t$$
$$T_t = \varphi T_{t-1} + a * b * e_t$$
$$\mathrm{F}_{t+m} = S_t + \sum_{i=1}^{m} \varphi^i \, T_t$$

Οι συντελεστές α και β πρέπει να υπολογίζονται, ώστε να ελαχιστοποιείται *συνήθως* το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), όπου $0<α<1$, $0<β<a$

- Χρειάζεται προσοχή στην αρχικοποίηση του μοντέλου.
- Πρέπει να εκτελείται μία γραμμική παλινδρόμηση, με το χρόνο ως ανεξάρτητη μεταβλητή.
- Ως αρχικό επίπεδο ορίζεται η σταθερά A της παλινδρόμησης.
- Ως αρχική τάση ορίζεται η κλίση b της παλινδρόμησης.

Μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης (Damped)

$$e_t = Y_t - F_t$$
$$S_t = S_{t-1} + \varphi T_{t-1} + a * e_t$$
$$T_t = \varphi T_{t-1} + a * b * e_t$$
$$\mathrm{F}_{t+m} = S_t + \sum_{i=1}^{m} \varphi^i T_t$$

Οι συντελεστές α και β πρέπει να υπολογίζονται, ώστε να ελαχιστοποιείται *συνήθως* το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), όπου 0<α<1, 0<β<a

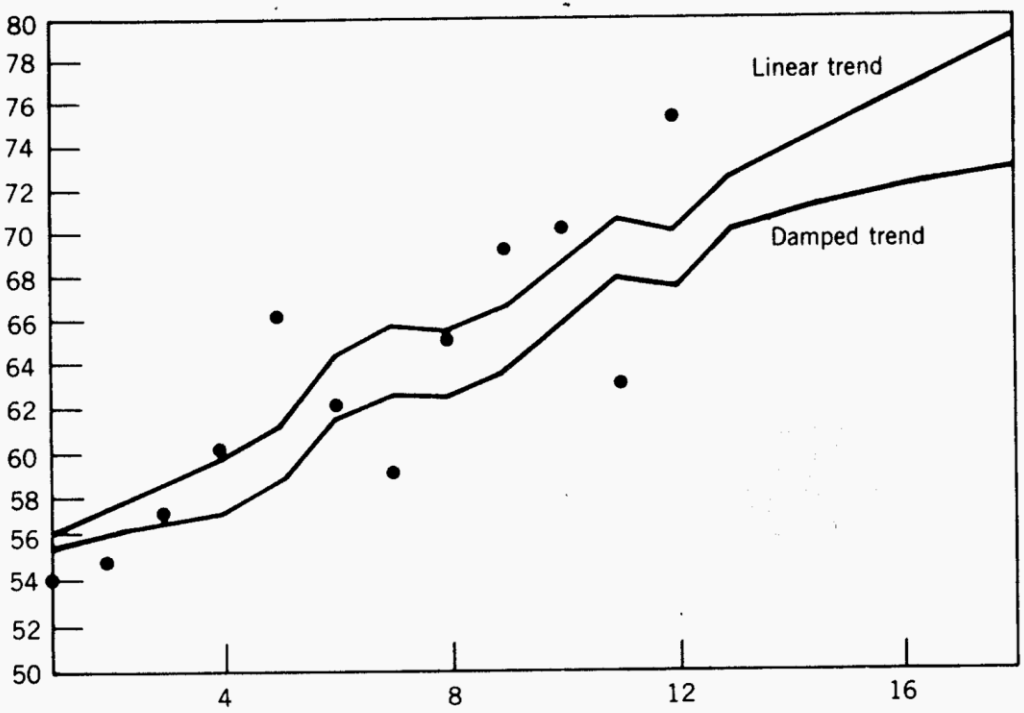
- Το μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα αυτόματο μοντέλο πρόβλεψης για κάθε μη εποχιακή χρονοσειρά, ανάλογα με τον damping factor που θα επιλέξουμε:
  - $\phi \approx 0$,σταθερού επιπέδου
  - $\phi < 1$,φθίνουσας τάσης
  - $\phi \approx 1$,γραμμικής τάσης
  - $\phi > 1$,εκθετικής τάσης

Μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης (Damped)

$$h_1 = 0.2, \qquad h_2 = 0.1, \qquad \varphi = 0.8$$

Time t	Data X_t	Forecast $X_{t-1}(1)$	Error e_t	Level at End of t: $S_t = S_{t-1} + \phi T_{t-1} + h_1 e_t$	Trend at End of t: $T_t = \phi T_{t-1} + h_2 e_t$	Forecast for $t+1$: $\hat{X}_t(1) = S_t + \phi T_t$
0				$S_0 =$ 54.0	$T_0 =$ 2.0	$\hat{X}_0(1) = 54.0 + 0.8(2.0) =$ 55.6
1	54.0	55.6	−1.6	$S_1 = 54.0 + 0.8(2.0) + 0.2(-1.6) =$ 55.3	$T_1 = 0.8(2.0) + 0.1(-1.6) =$ 1.4	$\hat{X}_1(1) = 55.3 + 0.8(1.4) =$ 56.4
2	55.0	56.4	−1.4	$S_2 = 55.3 + 0.8(1.4) + 0.2(-1.4) =$ 56.1	$T_2 = 0.8(1.4) + 0.1(-1.4) =$ 1.0	$\hat{X}_2(1) = 56.1 + 0.8(1.0) =$ 56.9
3	57.0	56.9	0.1	$S_3 = 56.1 + 0.8(1.0) + 0.2(0.1) =$ 56.9	$T_3 = 0.8(1.0) + 0.1(0.1) =$ 0.8	$\hat{X}_3(1) = 56.9 + 0.8(0.8) =$ 57.5
4	60.0	57.5	2.5	$S_4 = 56.9 + 0.8(0.8) + 0.2(2.5) =$ 58.0	$T_4 = 0.8(0.8) + 0.1(2.5) =$ 0.9	$\hat{X}_4(1) = 58.0 + 0.8(0.9) =$ 58.7
5	66.0	58.7	7.3	$S_5 = 58.0 + 0.8(0.9) + 0.2(7.3) =$ 60.2	$T_5 = 0.8(0.9) + 0.1(7.3) =$ 1.5	$\hat{X}_5(1) = 60.2 + 0.8(1.5) =$ 61.4
6	62.0	61.4	0.6	$S_6 = 60.2 + 0.8(1.5) + 0.2(0.6) =$ 61.5	$T_6 = 0.8(1.5) + 0.1(0.6) =$ 1.3	$\hat{X}_6(1) = 61.5 + 0.8(1.3) =$ 62.5
7	59.0	62.5	−3.5	$S_7 = 61.5 + 0.8(1.3) + 0.1(-3.5) =$ 61.8	$T_7 = 0.8(1.3) + 0.1(-3.5) =$ 0.7	$\hat{X}_7(1) = 61.8 + 0.8(0.7) =$ 62.4
8	65.0	62.4	2.6	$S_8 = 61.8 + 0.8(0.7) + 0.2(2.6) =$ 62.9	$T_8 = 0.8(0.7) + 0.1(2.6) =$ 0.8	$\hat{X}_8(1) = 62.9 + 0.8(0.8) =$ 63.5
9	69.0	63.5	5.5	$S_9 = 62.9 + 0.8(0.8) + 0.2(5.5) =$ 64.6	$T_9 = 0.8(0.8) + 0.1(5.5) =$ 1.2	$\hat{X}_9(1) = 64.6 + 0.8(1.2) =$ 65.6
10	70.0	65.6	4.4	$S_{10} = 64.6 + 0.8(1.2) + 0.2(4.4) =$ 66.5	$T_{10} = 0.8(1.2) + 0.1(4.4) =$ 1.4	$\hat{X}_{10}(1) = 66.5 + 0.8(1.4) =$ 67.6
11	63.0	67.6	−4.6	$S_{11} = 66.5 + 0.8(1.4) + 0.2(-4.6) =$ 66.7	$T_{11} = 0.8(1.4) + 0.1(-4.6) =$ 0.7	$\hat{X}_{11}(1) = 66.7 + 0.8(0.7) =$ 67.3
12	75.0	67.3	7.7	$S_{12} = 66.7 + 0.8(0.7) + 0.2(7.7) =$ 68.8	$T_{12} = 0.8(0.7) + 0.1(7.7) =$ 1.3	$\hat{X}_{12}(1) = 68.8 + 0.8(1.3) =$ 69.8
13		69.8				

Σύγκριση Μοντέλων Γραμμικής & Μη Γραμμικής Τάσης



Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου με Πολ/κή Εποχιακότητα

$h_1 = 0.1, \qquad h_3 = 0.01$

Time t	Data X_t	Forecast $\hat{X}_{t-1}(1)$	Error e_t	Deseasonalized Level at End of t $S_t = S_{t-1} + h_1 e_t / I_{t-p}$	Seasonal Index at End of t $I_t = I_{t-p} + h_3 e_t / S_t$	Forecast for $t+1$ $\hat{X}_t(1) = S_t(I_{t-p+1})$
−3					$I_{-3} = 0.6122$	
−2					$I_{-2} = 1.0086$	
−1					$I_{-1} = 1.3303$	
0				$S_0 = 74.3$	$I_0 = 1.0489$	$\hat{X}_0(1) = 74.3(0.6122) = 45.5$
1	53.0	45.5	7.5	$S_1 = 74.3 + 0.1(7.5)/0.6122 = 75.5$	$I_1 = 0.6122 + 0.01(7.5)/75.5 = 0.6132$	$\hat{X}_1(1) = 75.5(1.0086) = 76.2$
2	85.0	76.2	8.8	$S_2 = 75.5 + 0.1(8.8)/1.0086 = 76.4$	$I_2 = 1.0086 + 0.01(8.8)/76.4 = 1.0098$	$\hat{X}_2(1) = 76.4(1.3303) = 101.6$
3	92.0	101.6	−9.6	$S_3 = 76.4 + 0.1(-9.6)/1.3303 = 75.7$	$I_3 = 1.3303 + 0.01(-9.6)/75.7 = 1.3290$	$\hat{X}_3(1) = 75.7(1.0489) = 79.4$
4	78.0	79.4	−1.4	$S_4 = 75.7 + 0.1(-1.4)/1.0489 = 75.5$	$I_4 = 1.0489 + 0.01(-1.4)/75.5 = 1.0487$	$\hat{X}_4(1) = 75.5(0.6132) = 46.3$
5	44.0	46.3	−2.3	$S_5 = 75.5 + 0.1(-2.3)/0.6132 = 75.2$	$I_5 = 0.6132 + 0.01(-2.3)/75.2 = 0.6129$	$\hat{X}_5 = 5.2(1.0098) = 75.9$
6	75.0	75.9	−0.9	$S_6 = 75.2 + 0.1(-0.9)/1.0098 = 75.1$	$I_6 = 1.0098 + 0.01(-0.9)/75.1 = 1.0096$	$\hat{X}_6(1) = 75.1(1.3290) = 99.8$
7	102.0	99.8	2.2	$S_7 = 75.1 + 0.1(2.2)/1.3290 = 75.2$	$I_7 = 1.3290 + 0.01(2.2)/75.2 = 1.3293$	$\hat{X}_7(1) = 75.2(1.0487) = 78.9$
8	60.0	78.9	−18.9	$S_8 = 75.2 + 0.1(-18.9)/1.0487 = 73.4$	$I_8 = 1.0487 + 0.01(-18.9)/73.4 = 1.0461$	$\hat{X}_8(1) = 73.4(0.6129) = 45.0$
9	55.0	45.0	10.0	$S_9 = 73.4 + 0.1(10.0)/0.6129 = 75.1$	$I_9 = 0.6129 + 0.01(10.0)/75.1 = 0.6142$	$\hat{X}_9(1) = 75.1(1.0096) = 75.8$
10	88.0	75.8	12.2	$S_{10} = 75.1 + 0.1(12.2)/1.0096 = 76.3$	$I_{10} = 1.0096 + 0.01(12.2)/76.3 = 1.0112$	$\hat{X}_{10}(1) = 76.3(1.3293) = 101.4$
11	108.0	101.4	6.6	$S_{11} = 76.3 + 0.1(6.6)/1.3293 = 76.8$	$I_{11} = 1.3293 + 0.01(6.6)/76.8 = 1.3302$	$\hat{X}_{11}(1) = 76.8(1.0461) = 80.3$
12	59.0	80.3	−21.3	$S_{12} = 76.8 + 0.1(-21.3)/1.0461 = 74.7$	$I_{12} = 1.0461 + 0.01(-21.3)/74.7 = 1.0433$	$\hat{X}_{12}(1) = 74.7(0.6142) = 45.9$
13		45.9				

Exponential Smoothing Using R

```
ses(x, h=10,
level=c(80,95),
fan=FALSE,
initial=c("optimal","s
imple"), alpha=NULL,
...)

holt(x, h=10,
damped=FALSE,
level=c(80,95),
fan=FALSE,
initial=c("optimal",
"simple"),
exponential=FALSE,
alpha=NULL, beta=NULL,
...)
```

x	a numeric vector or time series
h	Number of periods for forecasting.
damped	If TRUE, use a damped trend.
seasonal	Type of seasonality in hw model. "additive" or "multiplicative"
level	Confidence level for prediction intervals.
fan	If TRUE, level is set to seq(50,99,by=1). This is suitable for fan plots.
initial	Method used for selecting initial state values. If optimal, the initial values are optimized along with the smoothing parameters using ets. If simple, the initial values are set to values obtained using simple calculations on the first few observations. See Hyndman & Athanasopoulos (2012) for details.
exponential	If TRUE, an exponential trend is fitted. Otherwise, the trend is (locally) linear.
alpha	Value of smoothing parameter for the level. If NULL, it will be estimated.
beta	Value of smoothing parameter for the trend. If NULL, it will be estimated.
gamma	Value of smoothing parameter for the seasonal component. If NULL, it will be estimated.
...	Other arguments passed to forecast.ets.

Exponential Smoothing Using R

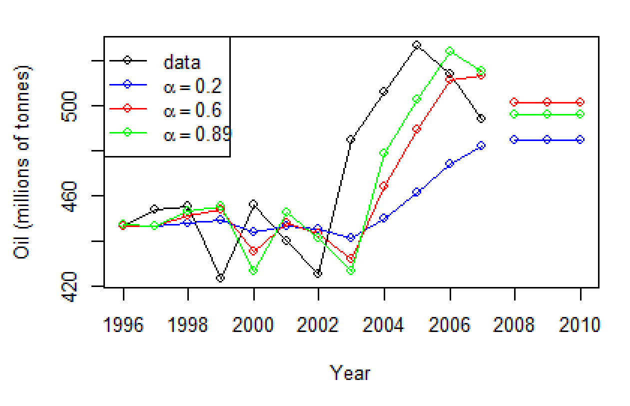
```
ses(x, h=10,
level=c(80,95),
fan=FALSE,
initial=c("optimal","s
imple"), alpha=NULL,
...)

holt(x, h=10,
damped=FALSE,
level=c(80,95),
fan=FALSE,
initial=c("optimal",
"simple"),
exponential=FALSE,
alpha=NULL, beta=NULL,
...)
```

An object of class "forecast" is a list containing at least the following elements:

model	A list containing information about the fitted model
method	The name of the forecasting method as a character string
mean	Point forecasts as a time series
lower	Lower limits for prediction intervals
upper	Upper limits for prediction intervals
level	The confidence values associated with the prediction intervals
x	The original time series (either object itself or the time series used to create the model stored as object).
residuals	Residuals from the fitted model. That is x minus fitted values.
fitted	Fitted values (one-step forecasts)

Exponential Smoothing Using R

```
oildata <- window(oil,start=1996,end=2007)
fit1 <- ses(oildata, alpha=0.2, initial="simple", h=3)
fit2 <- ses(oildata, alpha=0.6, initial="simple", h=3)
fit3 <- ses(oildata, h=3)
plot(fit1, plot.conf=FALSE, ylab="Oil (millions of tonnes)",
     xlab="Year", main="", fcol="white", type="o")
lines(fitted(fit1), col="blue", type="o")
lines(fitted(fit2), col="red", type="o")
lines(fitted(fit3), col="green", type="o")
lines(fit1$mean, col="blue", type="o")
lines(fit2$mean, col="red", type="o")
lines(fit3$mean, col="green", type="o")
legend("topleft",lty=1, col=c(1,"blue","red","green"),
       c("data", expression(alpha == 0.2), expression(alpha == 0.6),
         expression(alpha == 0.89)),pch=1)
```



Exponential Smoothing Using R

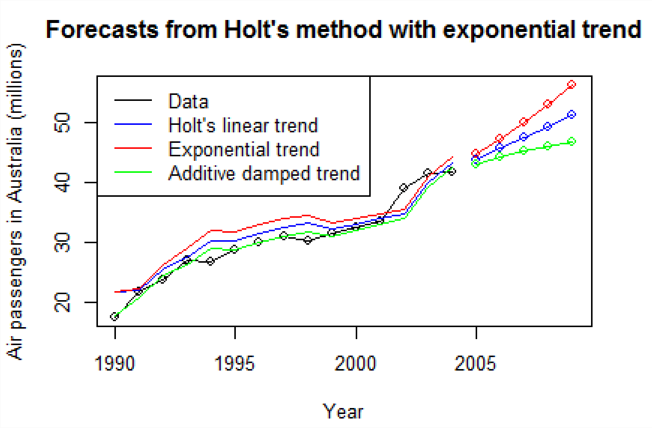
```
air <- window(ausair,start=1990,end=2004)
fit1 <- holt(air, alpha=0.8, beta=0.2, initial="simple",
h=5)
fit2 <- holt(air, alpha=0.8, beta=0.2, initial="simple",
exponential=TRUE, h=5)
# Results for first model:
fit1$model$state
fitted(fit1)
fit1$mean
```

```
> fitted(fit1)
Time Series:
Start = 1990
End = 2004
Frequency = 1
 [1] 21.86010 22.03237 25.48462 27.54059 30.28813 30.26106 3
1.58122 32.59923 33.24224 32.26755 33.07776 33.95807 34.7770
8
[14] 40.05535 43.21586
> fit1$mean
Time Series:
Start = 2005
End = 2009
Frequency = 1
[1] 43.75697 45.59352 47.43008 49.26663 51.10319
```

```
> fit1$model$state
Time Series:
Start = 1989
End = 2004
Frequency = 1
            l        b
1989 17.55340 4.306700
1990 18.41474 3.617628
1991 21.89455 3.590065
1992 24.20620 3.334382
1993 27.05156 3.236576
1994 27.56843 2.692635
1995 29.11733 2.463889
1996 30.37632 2.222910
1997 31.28265 1.959592
1998 30.79701 1.470546
1999 31.71727 1.360489
2000 32.67761 1.280459
2001 33.57353 1.203552
2002 38.17268 1.882672
2003 41.12022 2.095644
2004 41.92041 1.836555
```

Exponential Smoothing Using R

```
fit3 <- holt(air, alpha=0.8, beta=0.2,
damped=TRUE, initial="simple", h=5)
plot(fit2, type="o", ylab="Air passengers in
Australia (millions)", xlab="Year",
fcol="white", plot.conf=FALSE)
lines(fitted(fit1), col="blue")
lines(fitted(fit2), col="red")
lines(fitted(fit3), col="green")
lines(fit1$mean, col="blue", type="o")
lines(fit2$mean, col="red", type="o")
lines(fit3$mean, col="green", type="o")
legend("topleft",
lty=1, col=c("black","blue","red","green"),
c("Data","Holt's linear trend","Exponential
trend","Additive damped trend"))
```

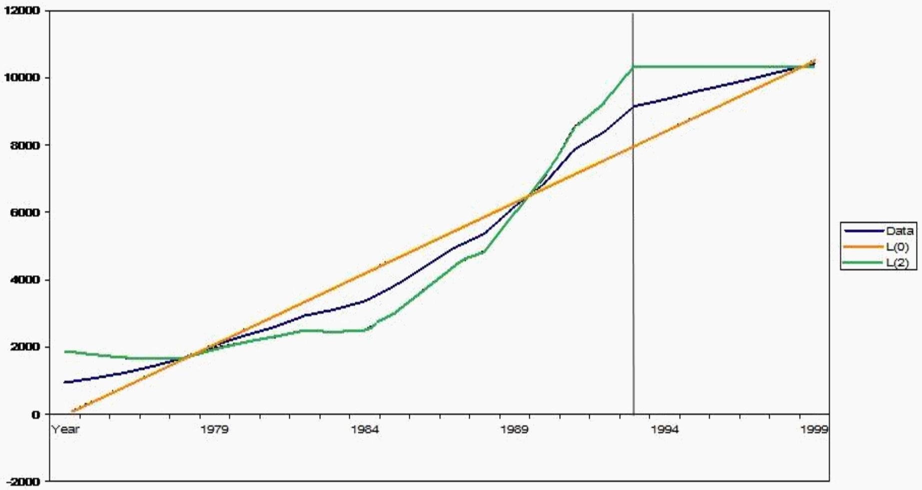


Στατιστική Πρόβλεψη

Μέθοδος Theta

Η μέθοδος πρόβλεψης **Theta** βασίζεται στην τροποποίηση των τοπικών καμπυλοτήτων της χρονοσειράς. Η αρχική χρονοσειρά αποσυντίθεται σε δύο ή περισσότερες γραμμές Theta, κάθε μία από τις οποίες προεκτείνεται ξεχωριστά. Οι ανεξάρτητες προβλέψεις συνδυάζονται για την παραγωγή των τελικών προβλέψεων.

Figure 1. M3 Competition - N0001YB001-YEARLY/MICRO



Το Μοντέλο Θ

Η Μέθοδος Θ : Μια μέθοδος παραγωγής προβλέψεων βασισμένη σε μια διαφορετική προσέγγιση της αποσύνθεσης

- Η μέθοδος Θ (*Assimakopoulos & Nikolopoulos, 2000*) είναι μια μονοδιάστατη μέθοδος πρόβλεψης.
- Βασίζεται στην μεταβολή των τοπικών καμπυλοτήτων μιας χρονοσειράς μέσα από την παράμετρο *θ* (Theta), η οποία εφαρμόζεται στις διαφορές δεύτερης τάξης των δεδομένων.
- Η καινούργια χρονοσειρά που δημιουργείται (γραμμή Θ ή Theta Line) διατηρεί την μέση τιμή και γραμμική κλίση της αρχικής χρονοσειράς, αλλά όχι και τις τοπικές καμπυλότητες.
- Βασικό ποιοτικό χαρακτηριστικό των γραμμών Θ είναι η καλύτερη προσέγγιση της μακροπρόθεσμης συμπεριφοράς (τάσης) των δεδομένων ή η ανάδειξη των βραχυπρόθεσμων χαρακτηριστικών της (επίπεδο), ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου *θ* που επιλέγεται (<,>1).

FSU

Το Μοντέλο Θ

Η Μέθοδος Θ : Μια μέθοδος παραγωγής προβλέψεων βασισμένη σε μια διαφορετική προσέγγιση της αποσύνθεσης

- Η μέθοδος Θ αποσυνθέτει (διαχωρίζει) την αρχική χρονοσειρά σε δύο ή περισσότερες γραμμές Θ.
- Η κάθε γραμμή προεκτείνεται στο μέλλον ξεχωριστά (με την ίδια ή και με διαφορετικές μεθόδους πρόβλεψης) και οι παραγόμενες προβλέψεις συνδυάζονται για να προκύψει η τελική πρόβλεψη.
- Ο απλός συνδυασμός δύο γραμμών Θ, για $\theta=0$ (ευθεία γραμμή) και $\theta=2$ (διπλασιασμός των τοπικών καμπυλοτήτων) χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή προβλέψεων για τις 3003 χρονοσειρές του διεθνούς διαγωνισμού προβλέψεων M3 (*Makridakis & Hibon, 2000*).
- Η μέθοδος παρήγαγε πολύ καλά αποτελέσματα, ιδιαίτερα για τις μηνιαίες χρονοσειρές και τα μικροοικονομικά δεδομένα.

FSU

Το Μοντέλο Θ

Η Μέθοδος Θ : Μια μέθοδος παραγωγής προβλέψεων βασισμένη σε μια διαφορετική προσέγγιση της αποσύνθεσης

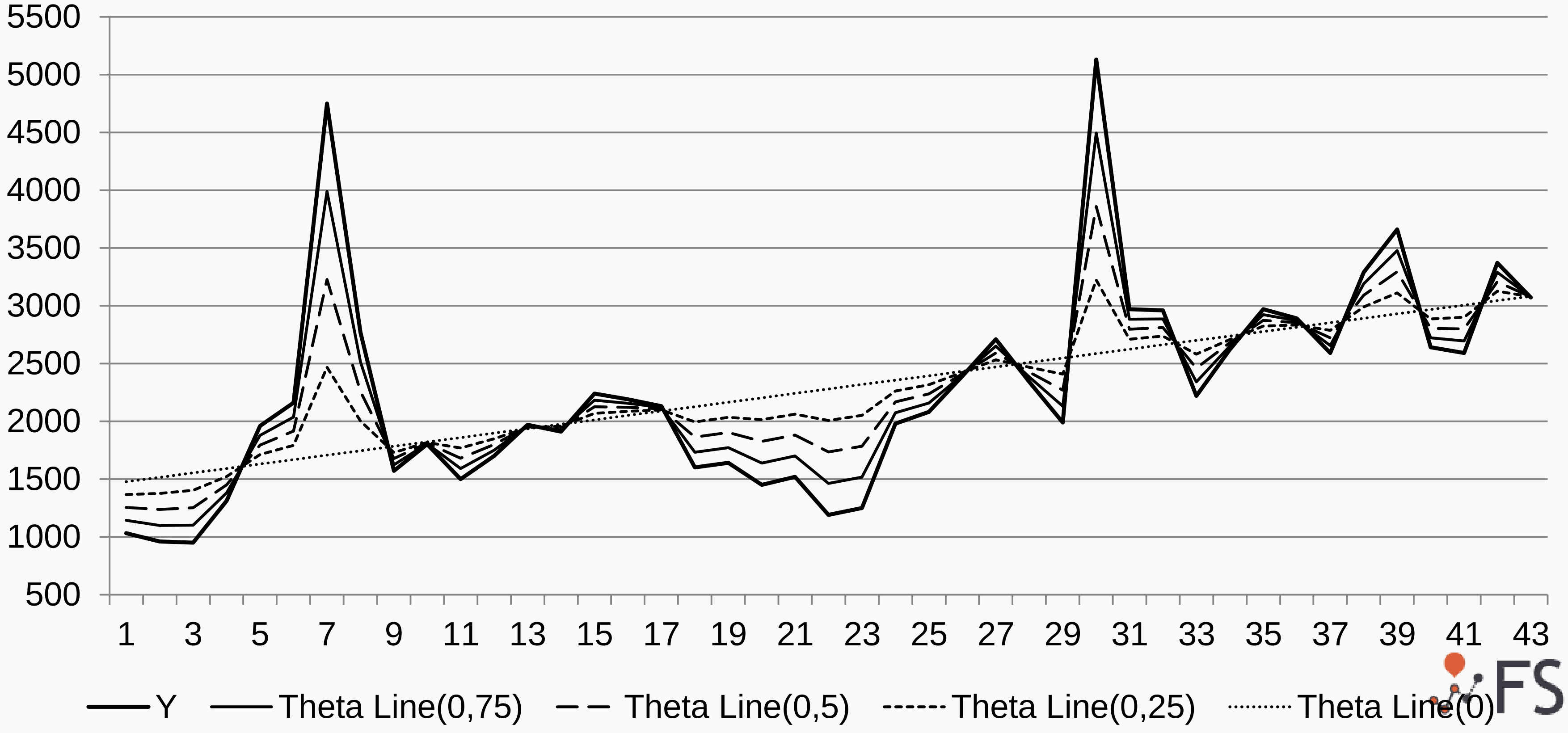
- Η μέθοδος Theta εισήγαγε μια διαφορετική προσέγγιση της αποσύνθεσης. Ο διαχωρισμός των αποεποχικοποιημένων δεδομένων γίνεται σε συνιστώσες (γραμμές Theta) μακροπρόθεσμης και βραχυπρόθεσμης τάσης.

- Η πρόκληση για τη συγκεκριμένη μέθοδο ήταν να αυξήσει το βαθμό αξιοποίησης της χρήσιμης πληροφορίας που είναι κρυμμένη μέσα στα δεδομένα, πριν την εφαρμογή ενός μοντέλου επέκτασης των δεδομένων στο μέλλον (extrapolation model).

- Ουσιαστικά, η μέθοδος Theta λειτουργεί σαν ένας μεγεθυντικός φακός μέσα από τον οποίο οι διακυμάνσεις της χρονοσειράς μεγεθύνονται ή μικραίνουν. Ο γραμμικός συνδυασμός των προβλέψεων των συνιστωσών, γίνεται, μέσα από αυτήν την διαδικασία, πιο αποδοτικός.

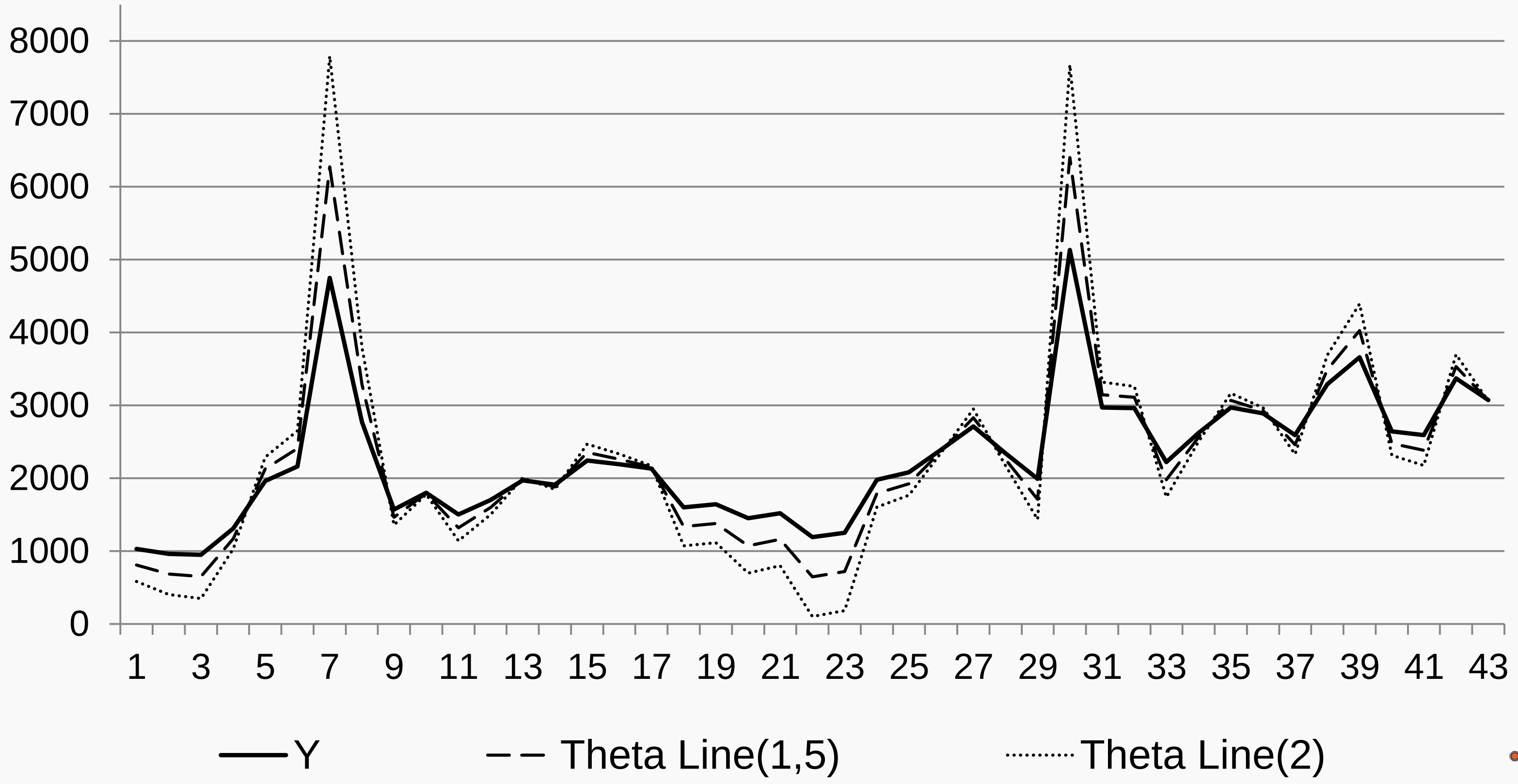
FSU

Γραμμές Θ



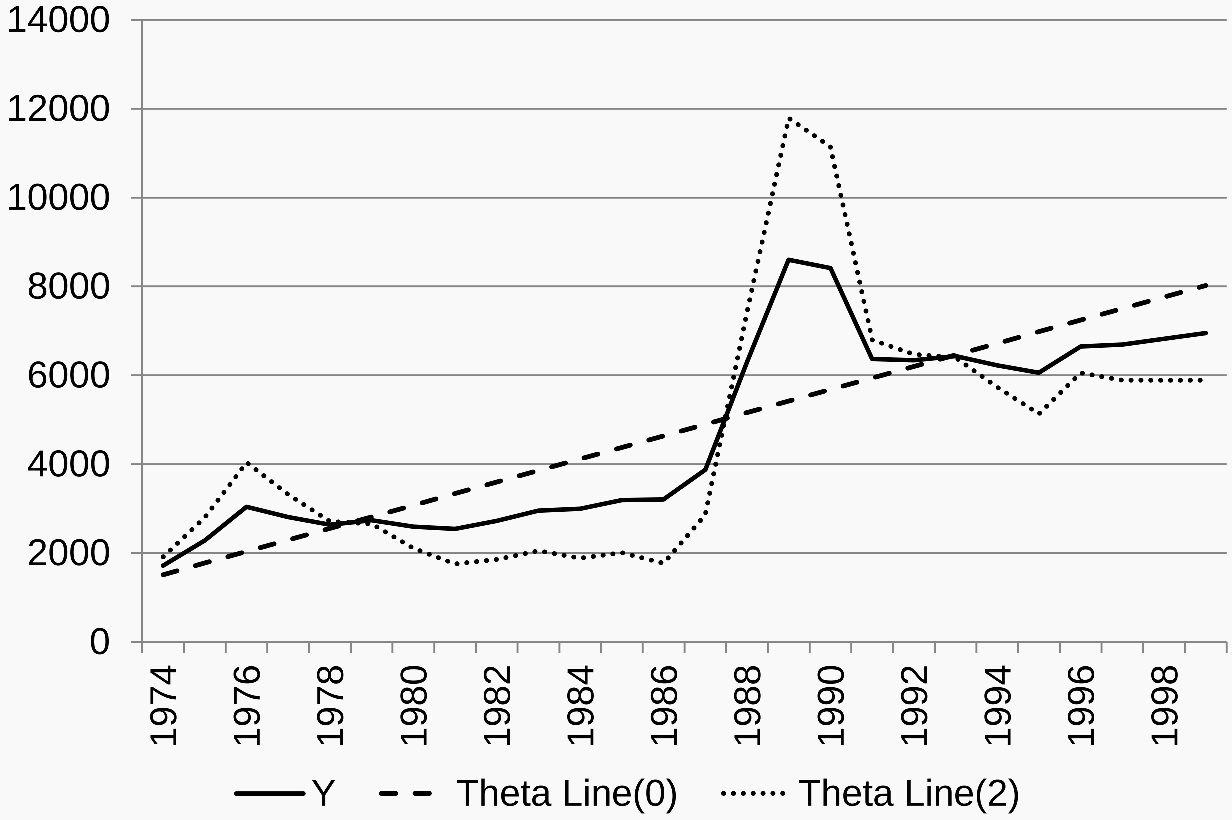
5500
5000
4500
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
1
3
5
7
9
11
13
15
17
19
21
23
25
27
29
31
33
35
37
39
41
43
Y
Theta Line(0,75)
Theta Line(0,5)
Theta Line(0,25)
Theta Line(0)

Γραμμές Θ



FSU

Γραμμές Θ



$$Y_t = \frac{1}{2} \cdot \left(Y_t^{\theta=0} + Y_t^{\theta=2}\right)$$

Το κλασσικό μοντέλο Θ

- Βήμα 0: **Τεστ Εποχιακότητας**

Η κάθε χρονοσειρά ελέγχεται ως προς την ύπαρξη εποχιακής συμπεριφοράς με κριτήριο την τιμή του συντελεστή αυτοσυσχέτησης - υστέρηση ίση με τη συχνότητα των δεδομένων (*π.χ. για μηνιαία δεδομένα k=12*) και διάστημα εμπιστοσύνης 90% ($t_{critical}$=1.645)

- Βήμα 1: **Αποεποχικοποίηση**

Η χρονοσειρά αποεποχικοποιείται – αν το τεστ ήταν θετικό - με την κλασσική μέθοδο αποσύνθεσης

- Βήμα 2: **Αποσύνθεση**

Κάθε χρονοσειρά αποσυντίθεται σε δύο γραμμές Θ, με *θ=0* και *θ=2*

- Βήμα 3: **Πρόβλεψη**

Η γραμμή *TL(0)* προεκτείνεται με απλή γραμμική παλινδρόμηση (LRL) ενώ η γραμμή *TL(2)* με απλή εκθετική εξομάλυνση (SES)

- Βήμα 4: **Συνδυασμός**

Οι προηγούμενες προβλέψεις συνδυάζονται με ίσα βάρη

- Βήμα 5: **Εποχικοποίηση**

Οι τελικές προβλέψεις εποχικοποιούνται – αν το τεστ ήταν θετικό

FSU

Υπολογίζοντας τις γραμμές Theta

Για το κλασσικό μοντέλο Theta (θ=0 και θ=2) οι γραμμές Θ υπολογίζονται ως εξής:

- Theta Line(0) = LRL
- Theta Line(2) = 2 x Data – LRL

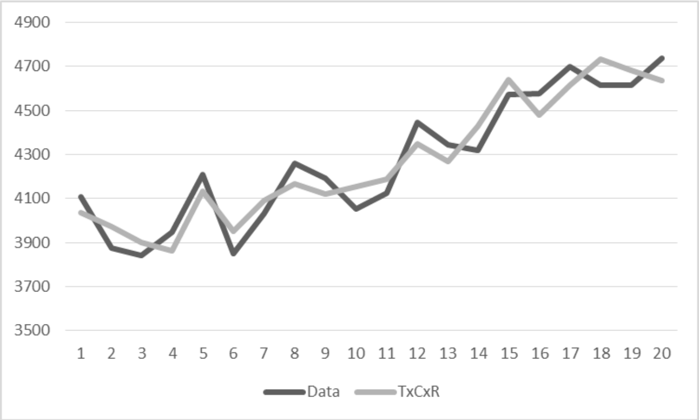
Γενικότερα ισχύει:

- **Theta Line(θ) = θ x Data + (1-θ) x LRL**
- Ή ισοδύναμα: Theta Line(θ) = LRL + θ x eLRL

Παράδειγμα Theta

Period	Data	TxC	SxRx100	I=SxR=S	TxCxR
1	4109			101,79	4036,68
2	3874			97,48	3974,13
3	3842	3955,00	97,14	98,54	3899,03
4	3946	3964,25	99,54	102,19	3861,43
5	4207	3984,75	105,58	101,79	4132,95
6	3850	4047,50	95,12	97,48	3949,51
7	4030	4085,00	98,65	98,54	4089,82
8	4260	4108,38	103,69	102,19	4168,71
9	4193	4145,50	101,15	101,79	4119,20
10	4051	4180,63	96,90	97,48	4155,70
11	4126	4222,63	97,71	98,54	4187,24
12	4445	4275,00	103,98	102,19	4349,74
13	4344	4364,13	99,54	101,79	4267,54
14	4319	4436,13	97,36	97,48	4430,63
15	4571	4496,88	101,65	98,54	4638,85
16	4576	4578,13	99,95	102,19	4477,93
17	4699	4620,25	101,70	101,79	4616,30
18	4614	4645,75	99,32	97,48	4733,25
19	4613			98,54	4681,47
20	4738			102,19	4636,46

- Αποεποχικοποίηση εποχιακής τριμηνιαίας χρονοσειράς



	105,58	101,15	99,54	101,70
	95,12	96,90	97,36	99,32
97,14	98,65	97,71	101,65	
99,54	103,69	103,98	99,95	

min	max
99,54	105,58
95,12	99,32
97,14	101,65
99,54	103,98

average (w/o min & max)
101,43
97,13
98,18
101,82

SI
101,79
97,48
98,54
102,19

sum	398,559
Σ.Κ.	0,9964

Παράδειγμα Theta

➢ Υπολογισμός γραμμής TL(0)

X	Y	Numerator			Denominator			ThetaLine(0)
Period	Data	X-Mean(X)=A	Y-Mean(Y)=B	A*B	(X-Mean(X))^2			LRL
1	4036,68	-9,5	-233,67	2219,87	90,25	b=slope	44.623	3846.42
2	3974,13	-8,5	-296,22	2517,88	72,25	a=constant	3801.8	3891.05
3	3899,03	-7,5	-371,32	2784,92	56,25			3935.67
4	3861,43	-6,5	-408,92	2657,95	42,25			3980.29
5	4132,95	-5,5	-137,40	755,68	30,25			4024.92
6	3949,51	-4,5	-320,84	1443,79	20,25			4069.54
7	4089,82	-3,5	-180,53	631,86	12,25			4114.16
8	4168,71	-2,5	-101,64	254,11	6,25			4158.79
9	4119,20	-1,5	-151,15	226,72	2,25			4203.41
10	4155,70	-0,5	-114,65	57,32	0,25			4248.03
11	4187,24	0,5	-83,11	-41,55	0,25			4292.66
12	4349,74	1,5	79,39	119,09	2,25			4337.28
13	4267,54	2,5	-2,81	-7,02	6,25			4381.90
14	4430,63	3,5	160,28	560,98	12,25			4426.53
15	4638,85	4,5	368,50	1658,24	20,25			4471.15
16	4477,93	5,5	207,58	1141,71	30,25			4515.77
17	4616,30	6,5	345,95	2248,64	42,25			4560.40
18	4733,25	7,5	462,90	3471,78	56,25			4605.02
19	4681,47	8,5	411,12	3494,53	72,25			4649.64
20	4636,46	9,5	366,11	3478,06	90,25			4694.27
21								4738.89
22								4783.51
23								4828.14

Average	10,5	4270,329	Sum	29674.52	665

Παράδειγμα Theta

- Υπολογισμός γραμμής TL(2) και προέκταση γραμμών Θ

Period	Data	ThetaLine(0)	ThetaLine(2)
1	4036,68	3846.42	4226.94
2	3974,13	3891.05	4057.21
3	3899,03	3935.67	3862.39
4	3861,43	3980.29	3742.57
5	4132,95	4024.92	4240.98
6	3949,51	4069.54	3829.48
7	4089,82	4114.16	4065.48
8	4168,71	4158.79	4178.63
9	4119,20	4203.41	4034.99
10	4155,70	4248.03	4063.37
11	4187,24	4292.66	4081.82
12	4349,74	4337.28	4362.20
13	4267,54	4381.90	4153.18
14	4430,63	4426.53	4434.73
15	4638,85	4471.15	4806.55
16	4477,93	4515.77	4440.09
17	4616,30	4560.40	4672.20
18	4733,25	4605.02	4861.48
19	4681,47	4649.64	4713.30
20	4636,46	4694.27	4578.65
21		4738.89	
22		4783.51	
23		4828.14	

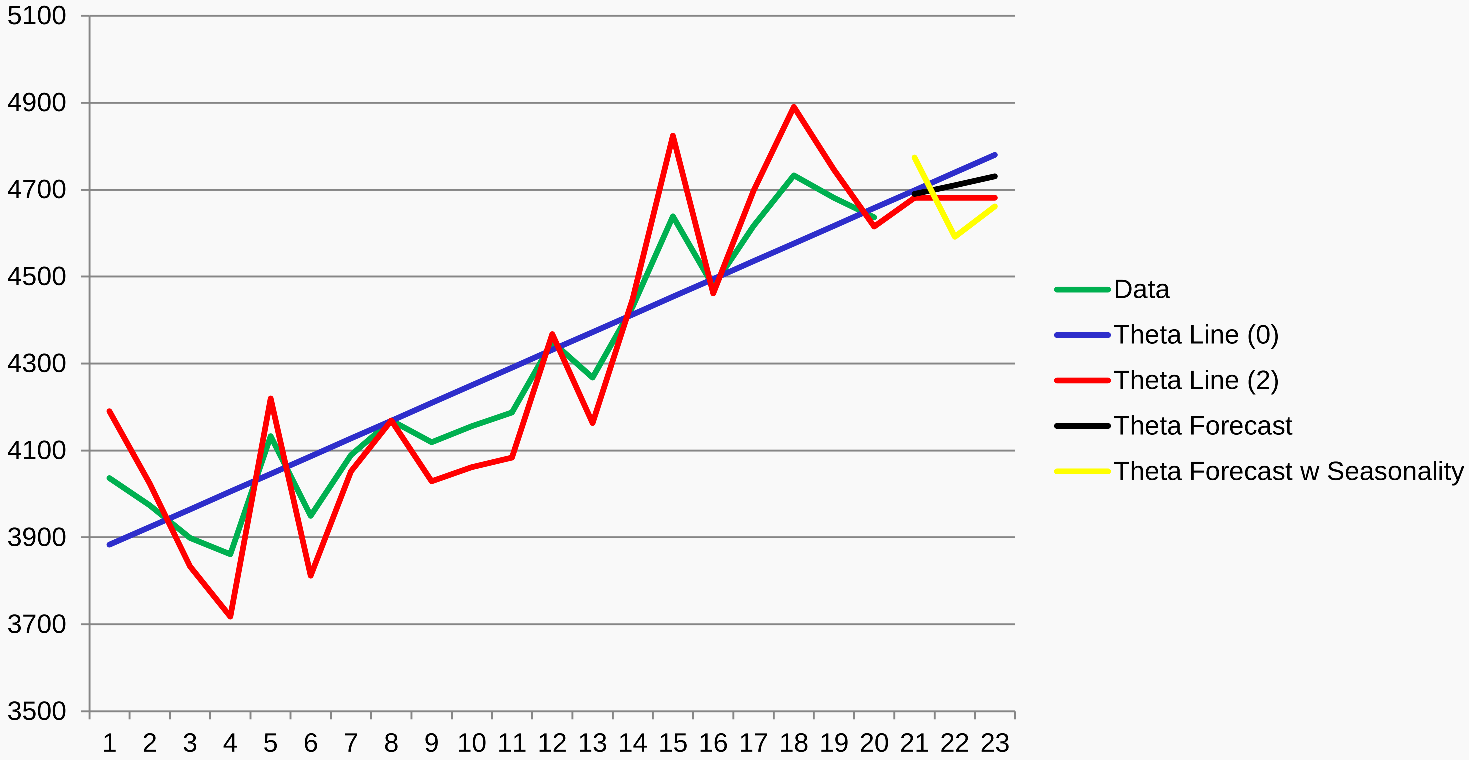
SES on ThetaLine(2) with a=0.5
4226.94
4226.94
4142.08
4002.23
3872.40
4056.69
3943.09
4004.28
4091.46
4063.22
4063.30
4072.56
4217.38
4185.28
4310.01
4558.28
4499.18
4585.69
4723.59
4718.44
4648.55
4648.55
4648.55

Παράδειγμα Theta

➢ Συνδυασμός προβλέψεων και εποχικοποίηση

Period	Data	ThetaLine(0)	ThetaLine(2)	Theta Forecast	SI	Theta Forecast w Seasonality
1	4036,679	3846.42	4226.937			
2	3974,128	3891.05	4057.213			
3	3899,027	3935.67	3862.39			
4	3861,435	3980.29	3742.567			
5	4132,955	4024.92	4240.983			
6	3949,508	4069.54	3829.48			
7	4089,817	4114.16	4065.477			
8	4168,706	4158.79	4178.633			
9	4119,201	4203.41	4034.99			
10	4155,703	4248.03	4063.367			
11	4187,242	4292.66	4081.823			
12	4349,741	4337.28	4362.2			
13	4267,543	4381.90	4153.177			
14	4430,63	4426.53	4434.733			
15	4638,848	4471.15	4806.55			
16	4477,934	4515.77	4440.087			
17	4616,295	4560.40	4672.203			
18	4733,255	4605.02	4861.48			
19	4681,471	4649.64	4713.297			
20	4636,462	4694.27	4578.653			
21		4738.89	4648.55	4693.72	101,79	4777.74
22		4783.51	4648.55	4716.03	97,48	4597.19
23		4828.14	4648.55	4738.34	98,54	4669.16

Παράδειγμα Theta



FSU

Στόχοι Διαγωνισμών Πρόβλεψης

- Δημιουργία ερεθισμάτων στους ερευνητές για την υλοποίηση νέων και ακριβέστερων μεθόδων πρόβλεψης
- Σύγκριση και ταξινόμηση των μεθόδων πρόβλεψης με κριτήριο την ελαχιστοποίηση του σφάλματος
- Εύρεση της ακριβέστερης μεθόδου πρόβλεψης ανά τύπο χρονοσειράς (χαρακτηριστικά, είδος, συχνότητα, μήκος)
- Έλεγχος της εγκυρότητας των αποτελεσμάτων προηγούμενων διαγωνισμών πρόβλεψης

https://robjhyndman.com/hyndsight/forecasting-competitions/

Διαγωνισμός Μ1

Έτος διεξαγωγής 1982 | 1,001 χρονοσειρές | 15 μέθοδοι πρόβλεψης & 9 παραλλαγές

- Οι στατιστικά πολύπλοκες ή εξεζητημένες μέθοδοι δεν παράγουν απαραίτητα και ακριβέστερες προβλέψεις σε σχέση με τις πιο απλές.
- Η σχετική κατάταξη της απόδοσης των διαφόρων μεθόδων ποικίλει ανάλογα με το κριτήριο ακρίβειας που χρησιμοποιείται.
- Ο συνδυασμός απλών μεθόδων πρόβλεψης συνήθως οδηγεί σε καλύτερη ακρίβεια σε σχέση με αυτή των επιμέρους μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν.
- Η ακρίβεια πρόβλεψης εξαρτάται από την έκταση του ορίζοντα πρόβλεψης.

FSU

Διαγωνισμός M2

Έτος διεξαγωγής 1993 | 29 χρονοσειρές | 16 μέθοδοι πρόβλεψης & 3 συνδυασμοί μεθόδων

- Συνδυασμός στατιστικών προβλέψεων με κριτικές προβλέψεις βάσει εξωτερικής πληροφόρησης και εμπειρίας
- Συνεχής επικοινωνία αναλυτών με επιχειρήσεις και οργανισμούς για τη βελτίωση της προβλεπτικής ακρίβειας των μεθόδων.
- Εκπαίδευση των αναλυτών μέσω της επαναλαμβανόμενης κατάθεσης προβλέψεων σε πραγματικό χρόνο.

- Παρά τις επιπλέον πληροφορίες που δόθηκαν, οι βελτιώσεις στην ακρίβεια των προβλέψεων ήταν μικρές ή και ανύπαρκτες

FSU

Διαγωνισμός M3

Έτος διεξαγωγής 2000 | 3,003 χρονοσειρές | 24 μέθοδοι πρόβλεψης

- Επιβεβαιώθηκαν τα βασικά συμπεράσματα του διαγωνισμού M1
- Κατασκευάστηκε ένα μεγάλο σετ δεδομένων το οποίο αποτελεί ακόμα και σήμερα σημείο αναφοράς (benchmark) για τον έλεγχο της προβλεπτικής ακρίβειας νέων μεθόδων
- Καθιερώθηκε η χρήση γνωστών σετ δεδομένων και μεθόδων για την εξακρίβωση της προβλεπτικής ακρίβειας νέων μεθόδων
- Αναδείχτηκε το μοντέλο Θ ως μία νέα ακριβής μέθοδος πρόβλεψης

FSU

Διαγωνισμός M3

Συνοπτικά Αποτελέσματα

Μέθοδος Πρόβλεψης	SMAPE (σύνολο 1,428 μηνιαίων χρονοσειρών)	SMAPE (σύνολο 3,003 χρονοσειρών)
THETA	**13.85**	**13.01**
ForecastPro	13.86	13.19
ForcX	14.45	13.49
COMB S-H-D	14.48	13.52
DAMPEN	14.59	13.63
THETAsm	14.66	13.88
RBF	14.77	13.75
B-J automatic	14.81	14.01
AutomatANN	14.93	14.11
SMARTFCS	15.03	14.13

FSU

Διαγωνισμός M4

Έτος διεξαγωγής 2018 | 100,000 χρονοσειρές | Αναμένεται να συμμετάσχουν μέθοδοι κάθε τύπου (Στατιστικές, Μηχανικής Μάθησης & Συνδυασμός) | Χρηματικά έπαθλα

Συχνότητα / Τύπος	Micro	Industry	Macro	Finance	Demographic	Other	Total
Yearly	6,538	3,716	3,903	6,519	1,088	1,236	*23,000*
Quarterly	6,020	4,637	5,315	5,305	1,858	865	*24,000*
Monthly	10,975	10,017	10,016	10,987	5,728	277	*48,000*
Weekly	112	6	41	164	24	12	*359*
Daily	1,476	422	127	1,559	10	633	*4,227*
Hourly	0	0	0	0	0	414	*414*
Total	*25,121*	*18,798*	*19,402*	*24,534*	*8,708*	*3,437*	*100,000*

https://www.m4.unic.ac.cy/

FSU

Διαγωνισμός M4

- Σύγκριση ακρίβειας διαφορετικών μεθόδων πρόβλεψης και κυρίως των στατιστικών με αυτές της μηχανικής μάθησης (Machine Learning)*
- Σύγκριση ακρίβειας μεθόδων αναλυτών (ακαδημαϊκοί, εταιρίες, φοιτητές κτλ.) με απλές μεθόδους αναφοράς.
- Αξιοποίηση πλήθους δεδομένων για την εξακρίβωση της στατιστικής σημαντικότητας των αποτελεσμάτων.
- Αξιολόγηση προκατάληψης διαφόρων τύπων μεθόδων.
- Αξιολόγηση ακρίβειας διαστημάτων εμπιστοσύνης διαφόρων προσεγγίσεων.
- Συσχέτιση της προβλεπτικής ακρίβειας των μεθόδων με την ικανότητα προσαρμογής τους και τις υπολογιστικές τους απαιτήσεις.
- Επαλήθευση των αποτελεσμάτων (replicability) μέσω της υποβολής πληροφοριών, περιγραφών και ανοιχτού κώδικα.

* *Makridakis, S., Spiliotis, E., Assimakopoulos, V. (2018). Statistical and Machine Learning forecasting methods: Concerns and ways forward. PLOS ONE 13(3): e0194889*

FSU

Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Στη Στατιστική, το διάστημα εμπιστοσύνης (*Confidence Interval – CI*) είναι ένα σύνολο τιμών εντός των οποίων αναμένεται να κινείται μία παράμετρος. Στην ουσία, αντί να εκτιμούμε την παράμετρο με μία και μόνο τιμή, αποδίδουμε ένα διάστημα τιμών εντός του οποίου αυτή αναμένεται βάσει ιστορικών στοιχείων να κυμαίνεται για μία προκαθορισμένη πιθανότητα. Συνεπώς, τα διαστήματα εμπιστοσύνης χρησιμοποιούνται για να υποδείξουν την εγκυρότητα της παραμέτρου που θέλουμε να προβλέψουμε. Η πιθανότητα της τιμής παραμέτρου να περιλαμβάνεται στο διάστημα εμπιστοσύνης καθορίζεται από το επίπεδο εμπιστοσύνης . Αυξάνοντας το επίπεδο εμπιστοσύνης, το αντίστοιχο διάστημα «πλαταίνει».

Για παράδειγμα, ένα διάστημα εμπιστοσύνης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων μιας δημοσκόπησης. Σε μια δημοσκόπηση για πρόθεση ψήφου, το αποτέλεσμα ήταν ότι το 40% των ερωτηθέντων προτίθεται να ψηφήσει το κόμμα Χ. Ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95% θα υποδείκνυε ότι, βάσει δείγματος, η πραγματική πρόθεση ψήφου στο σύνολο του πληθυσμού για το κόμμα Χ είναι από 36% έως 44%. Συνεπώς, το αποτέλεσμα μιας δημοσκόπησης με μικρά διαστήματα εμπιστοσύνης θεωρείται πιο έγκυρο από αυτό μιας δημοσκόπησης με μεγάλα διαστήματα. Ένας από τους κύριους παράγοντες που επηρεάζουν το εκτιμώμενο εύρος είναι το μέγεθος του δείγματος των ερωτηθέντων.

Διαστήματα Εμπιστοσύνης

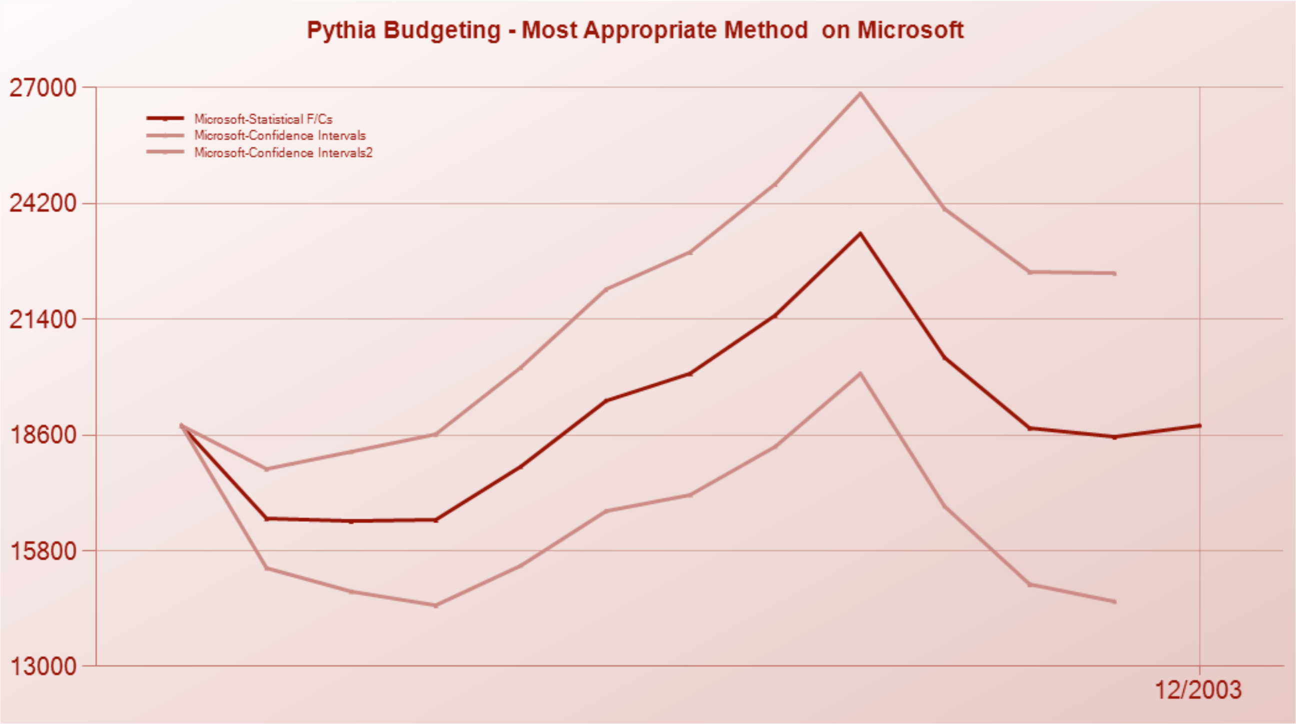
$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\mathrm{MSE}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - F_i)^2}$$

$$F_i = F_i \pm t \cdot \mathrm{RMSE} \cdot \sqrt{i - n}$$

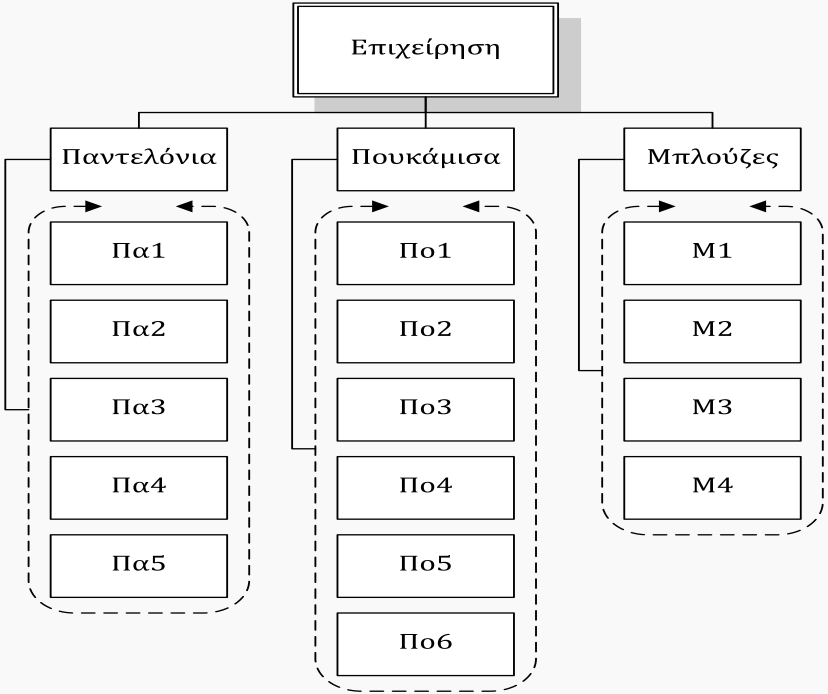
Confidence	t
99%	2.58
98%	2.33
95%	1.96
90%	1.645
80%	1.28

Όπου *F* είναι οι σημειακές προβλέψεις του μοντέλου, *t* είναι η παράμετρος εμπιστοσύνης, *RMSE* είναι η ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος και *n* είναι το σύνολο των διαθέσιμων παρατηρήσεων.

Διαστήματα Εμπιστοσύνης

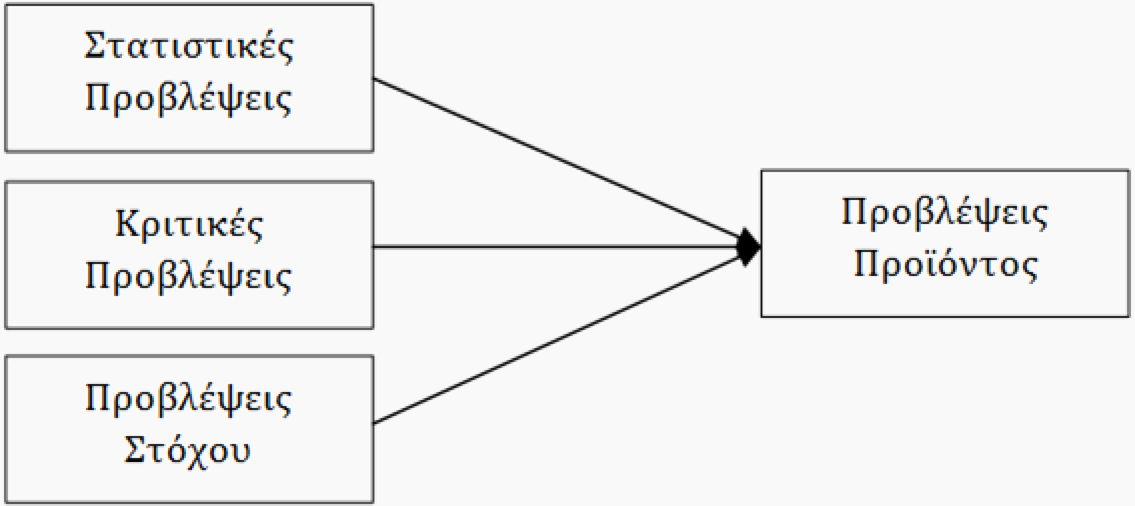


Η διαδικασία της πρόβλεψης στην επιχείρηση



Η διαδικασία της πρόβλεψης στην επιχείρηση

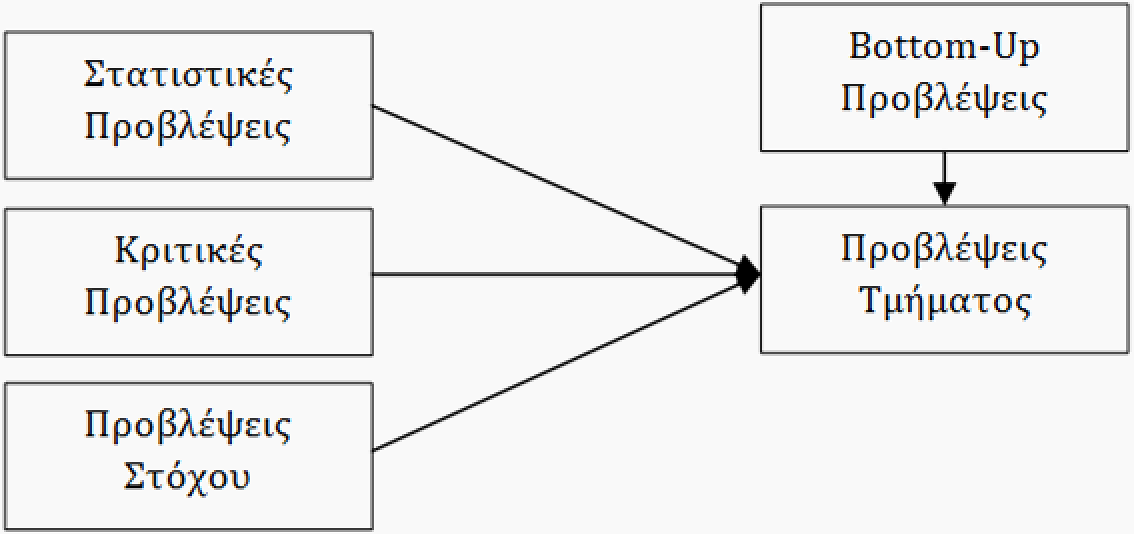
Πρόβλεψη Προϊόντος



Η διαδικασία της πρόβλεψης στην επιχείρηση

Πρόβλεψη Κατηγορίας/Τμήματος

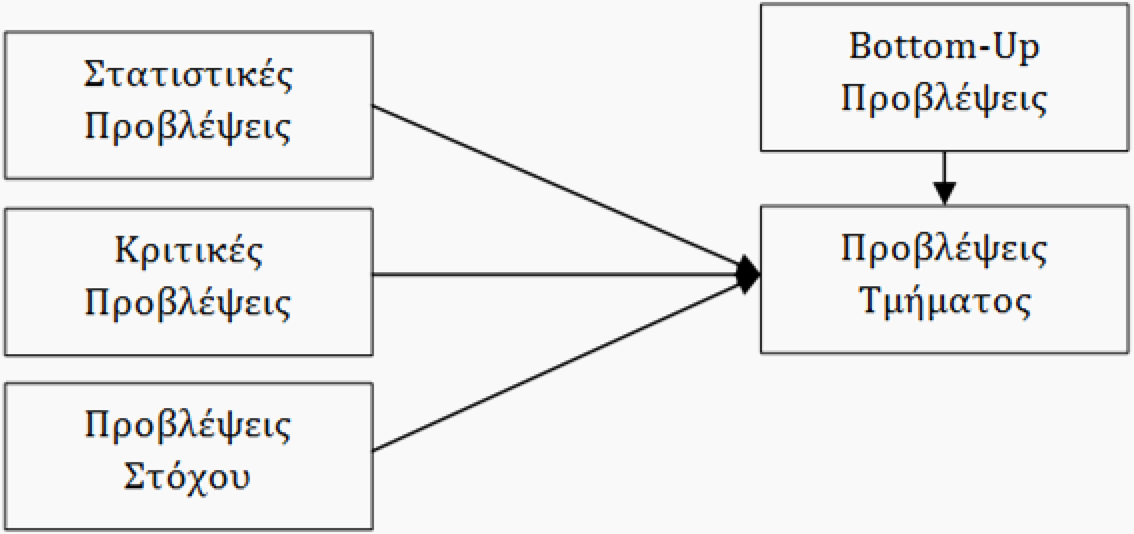
$$Y_t^{department} = \sum_{i=1}^{pr} Y_t^i \cdot p_t^i$$



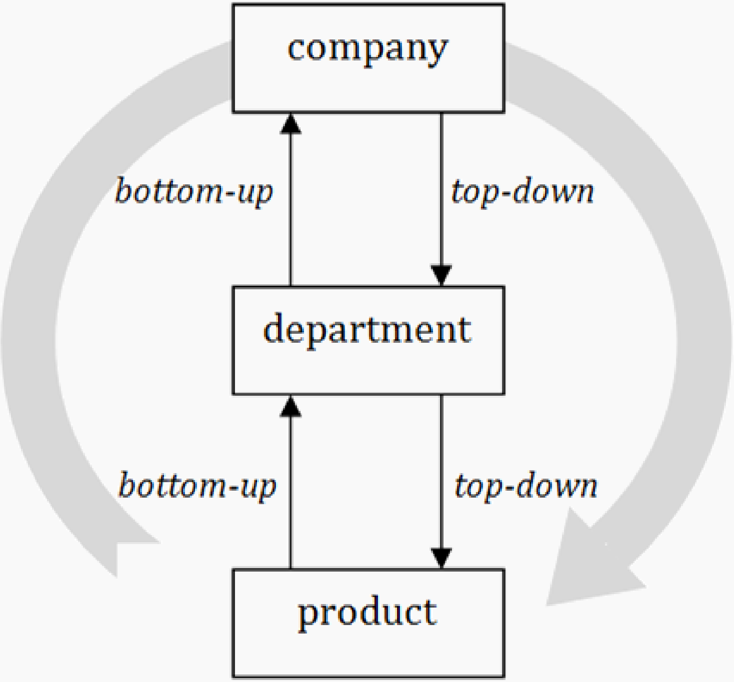
Η διαδικασία της πρόβλεψης στην επιχείρηση

Πρόβλεψη Επιχείρησης

$$Y_t^{company} = \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{pr} Y_t^{d,i} \cdot p_t^{d,i}$$

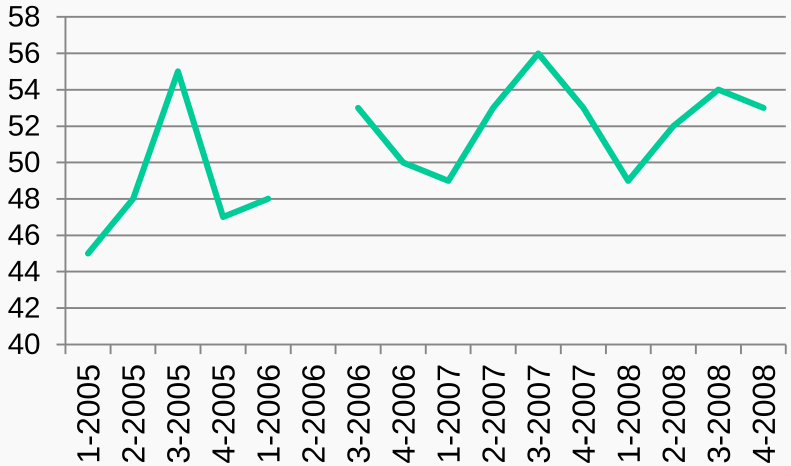


Η διαδικασία της πρόβλεψης στην επιχείρηση



Παράδειγμα Πρόβλεψης

A/A	Period	Demand
1	1-2005	45
2	2-2005	48
3	3-2005	55
4	4-2005	47
5	1-2006	48
6	2-2006	
7	3-2006	53
8	4-2006	50
9	1-2007	49
10	2-2007	53
11	3-2007	56
12	4-2007	53
13	1-2008	49
14	2-2008	52
15	3-2008	54
16	4-2008	53
17	1-2009	?
18	2-2009	?
19	3-2009	?
20	4-2009	?

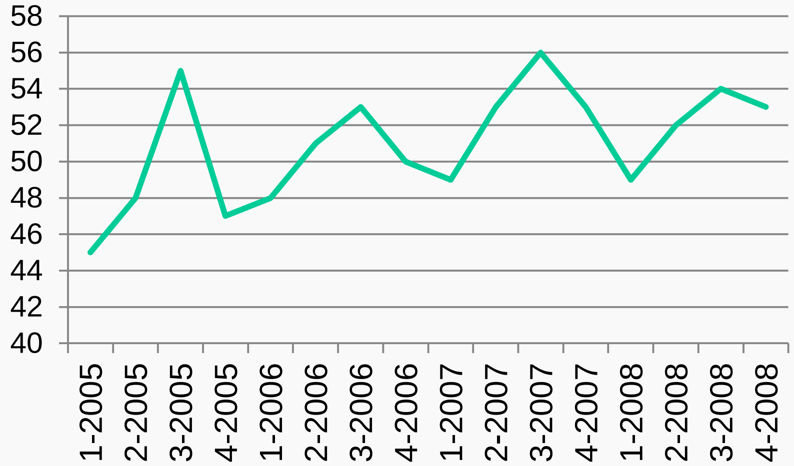


Παράδειγμα Πρόβλεψης

Εύρεση Missing Value

A/A	Period	Demand
1	1-2005	45
2	2-2005	48
3	3-2005	55
4	4-2005	47
5	1-2006	48
6	2-2006	51
7	3-2006	53
8	4-2006	50
9	1-2007	49
10	2-2007	53
11	3-2007	56
12	4-2007	53
13	1-2008	49
14	2-2008	52
15	3-2008	54
16	4-2008	53
17	1-2009	?
18	2-2009	?
19	3-2009	?
20	4-2009	?

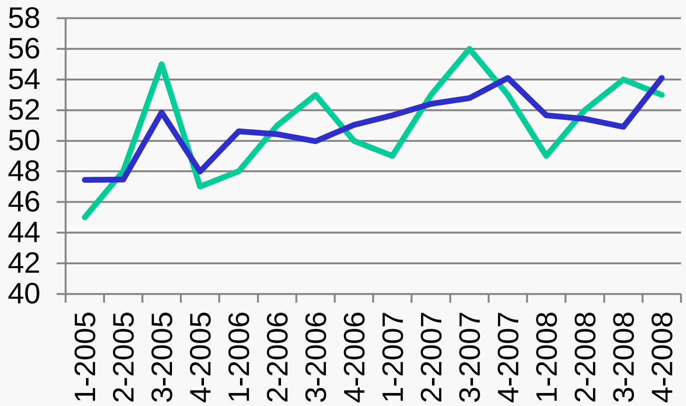
Η τιμή που λείπει συμπληρώνεται βάσει της διαχείρισης κενών τιμών (Μέσος Όρος των αντίστοιχων περιόδων διότι είναι εποχιακή η χρονοσειρά)



Παράδειγμα Πρόβλεψης

Εύρεση Χρονοσειράς χωρίς Εποχιακότητα

A/A	Period	Demand	AX(Demand)
1	1-2005	45	47,45
2	2-2005	48	47,47
3	3-2005	55	51,85
4	4-2005	47	47,98
5	1-2006	48	50,61
6	2-2006	51	50,44
7	3-2006	53	49,96
8	4-2006	50	51,04
9	1-2007	49	51,66
10	2-2007	53	52,42
11	3-2007	56	52,79
12	4-2007	53	54,10
13	1-2008	49	51,66
14	2-2008	52	51,43
15	3-2008	54	50,91
16	4-2008	53	54,10
17	1-2009	?	
18	2-2009	?	
19	3-2009	?	
20	4-2009	?	



1	94,84
2	101,12
3	106,08
4	97,96

Διαιρούμε κάθε πραγματική τιμή με τον δείκτη εποχιακότητας της αντίστοιχης περιόδου.

Παράδειγμα Πρόβλεψης

Ζητείται να ληφθεί υπόψη η εποχιακότητα για την παραγωγή προβλέψεων κάθε μεθόδου, όποτε η παραγωγή των προβλέψεων του κινητού μέσου όρου χρησιμοποιεί την αποεποχικοποιημένη χρονοσειρά.

y=a+bx

a=48,28 b=0,32

A/A	Period	Demand	AX(Deamnd)	KMO(3)	KMO(5)	SES(0,5)	LRL
1	1-2005	45	47,45				
2	2-2005	48	47,47				
3	3-2005	55	51,85				
4	4-2005	47	47,98	48,92			
5	1-2006	48	50,61	49,10			
6	2-2006	**51**	50,44	50,15			
7	3-2006	53	49,96	49,67			
8	4-2006	50	51,04	50,34			
9	1-2007	49	51,66	50,48			
10	2-2007	53	52,42	50,89			
11	3-2007	56	52,79	51,71			
12	4-2007	53	54,10	52,29			
13	1-2008	49	51,66	53,10			
14	2-2008	52	51,43	52,85			
15	3-2008	54	50,91	52,40			
16	4-2008	53	54,10	51,33			
17	1-2009	?		52,14			
18	2-2009	?		52,14			
19	3-2009	?		52,14			
20	4-2009	?		52,14			

Παράδειγμα Πρόβλεψης

y=a+bx

a=48,28 b=0,32

Ζητείται να ληφθεί υπόψη η εποχιακότητα για την παραγωγή προβλέψεων κάθε μεθόδου, όποτε η παραγωγή των προβλέψεων του κινητού μέσου όρου χρησιμοποιεί την αποεποχικοποιημένη χρονοσειρά.

A/A	Period	Demand	AX(Deamnd)	KMO(3)	KMO(5)	SES(0,5)	LRL
1	1-2005	45	47,45				
2	2-2005	48	47,47				
3	3-2005	55	51,85				
4	4-2005	47	47,98	48,92			
5	1-2006	48	50,61	49,10			
6	2-2006	**51**	50,44	50,15	49,07		
7	3-2006	53	49,96	49,67	49,67		
8	4-2006	50	51,04	50,34	50,17		
9	1-2007	49	51,66	50,48	50,01		
10	2-2007	53	52,42	50,89	50,74		
11	3-2007	56	52,79	51,71	51,10		
12	4-2007	53	54,10	52,29	51,57		
13	1-2008	49	51,66	53,10	52,40		
14	2-2008	52	51,43	52,85	52,53		
15	3-2008	54	50,91	52,40	52,48		
16	4-2008	53	54,10	51,33	52,18		
17	1-2009	?		52,14	52,44		
18	2-2009	?		52,14	52,44		
19	3-2009	?		52,14	52,44		

Παράδειγμα Πρόβλεψης

Ζητείται να ληφθεί υπόψη η εποχιακότητα για την παραγωγή προβλέψεων κάθε μεθόδου, όποτε η παραγωγή των προβλέψεων της εκθετική εξομάλυνσης χρησιμοποιεί την αποεποχικοποιημένη χρονοσειρά βάσει του τύπου:

$$F_{t+1}=a*Y_t+(1-a)*F_t$$

y=a+bx

a=48,28 b=0,32

A/A	Period	Demand	AX(Deamnd)	KMO(3)	KMO(5)	SES(0,5)	LRL
1	1-2005	45	47,45			47,45	
2	2-2005	48	47,47			0.5*47,45 +(1-0.5)*47.45 = 47.45	
3	3-2005	55	51,85			0.5*47,47 +(1-0.5)*47.45 = 47.46	
4	4-2005	47	47,98	48,92		0.5*51.85+(1-0.5)*47.46= 49.66	
5	1-2006	48	50,61	49,10		0.5*47.98+(1-0.5)*49.66=48,82	
6	2-2006	**51**	50,44	50,15	49,07	49,71	
7	3-2006	53	49,96	49,67	49,67	50,08	
8	4-2006	50	51,04	50,34	50,17	50,02	
9	1-2007	49	51,66	50,48	50,01	50,53	
10	2-2007	53	52,42	50,89	50,74	51,10	
11	3-2007	56	52,79	51,71	51,10	51,76	
12	4-2007	53	54,10	52,29	51,57	52,27	
13	1-2008	49	51,66	53,10	52,40	53,19	
14	2-2008	52	51,43	52,85	52,53	52,43	
15	3-2008	54	50,91	52,40	52,48	51,93	
16	4-2008	53	54,10	51,33	52,18	51,42	
17	1-2009	?		52,14	52,44	52,76	
18	2-2009	?		52,14	52,44	52,76	
19	3-2009	?		52,14	52,44	52,76	
20	4-2009	?		52,14	52,44	52,76	

Παράδειγμα Πρόβλεψης

y=a+bx

a=48,28 b=0,32

A/A	Period	Demand	AX(Deamnd)	KMO(3)	KMO(5)	SES(0,5)	LRL
1	1-2005	45	47,45			47,45	48,28 + 1x0,32 = 48,60
2	2-2005	48	47,47			0,5x47,45 + 0,5x47,45 = 47,45	48,28 + 2x0,32 = 48,92
3	3-2005	55	51,85			0,5x47,47 + 0,5x47,45 = 47,46	49,24
4	4-2005	47	47,98	48,92		49,65	49,56
5	1-2006	48	50,61	49,10		48,82	49,88
6	2-2006	**51**	50,44	50,15	49,07	49,71	50,2
7	3-2006	53	49,96	49,67	49,67	50,08	50,52
8	4-2006	50	51,04	50,34	50,17	50,02	50,84
9	1-2007	49	51,66	50,48	50,01	50,53	51,16
10	2-2007	53	52,42	50,89	50,74	51,10	51,48
11	3-2007	56	52,79	51,71	51,10	51,76	51,8
12	4-2007	53	54,10	52,29	51,57	52,27	52,12
13	1-2008	49	51,66	53,10	52,40	53,19	52,44
14	2-2008	52	51,43	52,85	52,53	52,43	52,76
15	3-2008	54	50,91	52,40	52,48	51,93	53,08
16	4-2008	53	54,10	51,33	52,18	51,42	53,4
17	1-2009	?		52,14	52,44	52,76	53,72
18	2-2009	?		52,14	52,44	52,76	54,04
19	3-2009	?		52,14	52,44	52,76	54,36
20	4-2009	?		52,14	52,44	52,76	54,68

Παράδειγμα Πρόβλεψης

Αξιολόγηση

Υπολογίζεται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του μοντέλου έτσι ώστε να βρεθεί το μοντέλο με το μικρότερο MSE έτσι ώστε να επιλεχθεί ως μέθοδος πρόβλεψης. **Οπότε επιλέγεται για την Πρόβλεψη η LRL** (Ευθεία ελαχίστων Τετραγώνων)

A/A	Period	Demand	AX(Deamnd)	KMO(3)	KMO(5)	SES(0,5)	LRL
1	1-2005	45	47,45			47,45	48,6
2	2-2005	48	47,47			47,75	48,92
3	3-2005	55	51,85			47,76	49,24
4	4-2005	47	47,98	48,92		49,65	49,56
5	1-2006	48	50,61	49,10		48,82	49,88
6	2-2006	51	50,44	50,15	49,07	49,71	50,2
7	3-2006	53	49,96	49,67	49,67	50,08	50,52
8	4-2006	50	51,04	50,34	50,17	50,02	50,84
9	1-2007	49	51,66	50,48	50,01	50,53	51,16
10	2-2007	53	52,42	50,89	50,74	51,10	51,48
11	3-2007	56	52,79	51,71	51,10	51,76	51,8
12	4-2007	53	54,10	52,29	51,57	52,27	52,12
13	1-2008	49	51,66	53,10	52,40	53,19	52,44
14	2-2008	52	51,43	52,85	52,53	52,43	52,76
15	3-2008	54	50,91	52,40	52,48	51,93	53,08
16	4-2008	53	54,10	51,33	52,18	51,42	53,4
17	1-2009	?		52,14	52,44	52,76	53,72
18	2-2009	?		52,14	52,44	52,76	54,04
19	3-2009	?		52,14	52,44	52,76	54,36
20	4-2009	?		52,14	52,44	52,76	54,68

Mean Squared Errors = MSE

KMO(3)	KMO(5)	SES(0,5)	LRL
0.08	1.88	0.53	0.06
0.08	0.08	0.01	0.31
0.49	0.76	1.04	0.04
1.39	2.72	1.28	0.25
2.34	2.82	1.74	0.88
1.17	2.86	1.06	0.98
3.28	6.40	3.35	3.92
2.07	0.55	2.34	0.61
2.02	1.21	1.00	1.77
2.22	2.46	1.04	4.71
7.67	3.69	7.18	0.49
2.07	**2.31**	**1.87**	**1.27**

Παράδειγμα Πρόβλεψης

Εποχικοποίηση

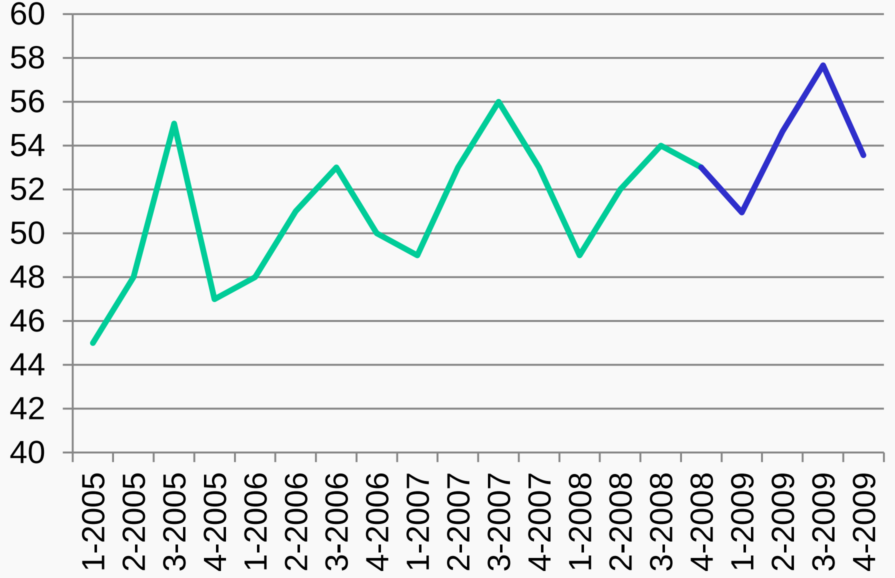
Προσοχή! Οι παραχθείσες προβλέψεις (σε όποια μέθοδο έχει χρησιμοποιηθεί η Αποεποχικοποιημένη Χρονοσειρά ΑΧ) πρέπει να πολλαπλασιαστούν με τους Δείκτες Εποχιακότητας των αντίστοιχων περιόδων.

A/A	Period	Demand	LRL	ΔΕ	Forecast
1	1-2005	45	48,6		
2	2-2005	48	48,92		
3	3-2005	55	49,24		
4	4-2005	47	49,56		
5	1-2006	48	49,88		
6	2-2006	51	50,2		
7	3-2006	53	50,52		
8	4-2006	50	50,84		
9	1-2007	49	51,16		
10	2-2007	53	51,48		
11	3-2007	56	51,8		
12	4-2007	53	52,12		
13	1-2008	49	52,44		
14	2-2008	52	52,76		
15	3-2008	54	53,08		
16	4-2008	53	53,4		
17	1-2009	?	53,72	94,84	50,95
18	2-2009	?	54,04	101,12	54,64
19	3-2009	?	54,36	106,08	57,66
20	4-2009	?	54,68	97,96	53,57

Παράδειγμα Πρόβλεψης

Προσοχή! Για την αξιολόγηση των προβλέψεων επιβάλλεται να δοθούν οι πραγματικές τιμές των δεδομένων για τις περιόδους που έχει υπολογιστεί η πρόβλεψη (πχ. 1-2009, 2-2009, 3-2009, 4-2009

A/A	Period	Demand
1	1-2005	45
2	2-2005	48
3	3-2005	55
4	4-2005	47
5	1-2006	48
6	2-2006	51
7	3-2006	53
8	4-2006	50
9	1-2007	49
10	2-2007	53
11	3-2007	56
12	4-2007	53
13	1-2008	49
14	2-2008	52
15	3-2008	54
16	4-2008	53
17	1-2009	*50,95*
18	2-2009	*54,64*
19	3-2009	*57,66*
20	4-2009	*53,57*



Fell free to say hi!

We are friendly and social

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφος
Αττική, 15780, Ελλάδα
E-mail: info(at)fsu.gr
Τηλέφωνο: 2107723637 Fax: 2107723740

Κτίριο της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
2ος όροφος - 2.2.1 Εργαστήριο

@FSU NTUA

Μονάδα Προβλέψεων και Στρατηγικής ΕΜΠ

lesson@fsu.gr