ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Μονάδα Προβλέψεων & Στρατηγικής

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές

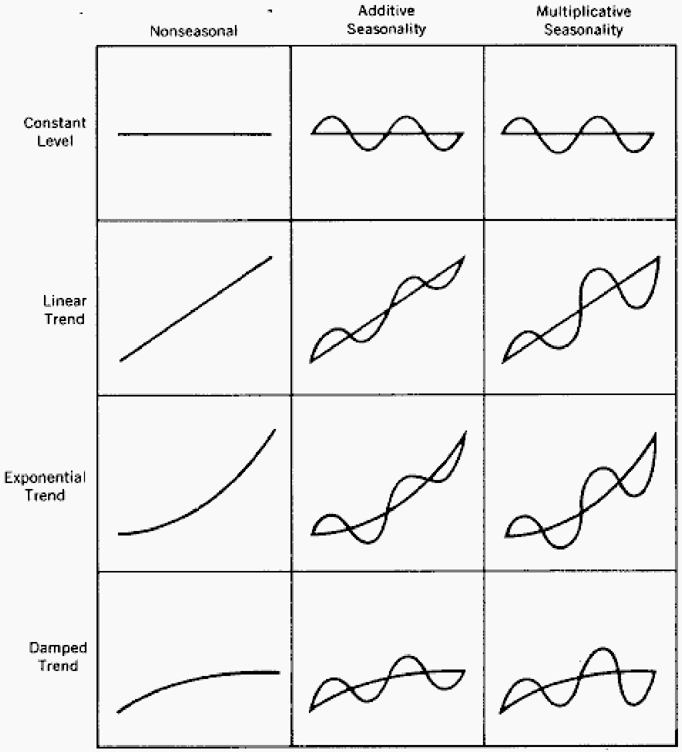
Μέθοδοι Εκθετικής Εξομάλυνσης Διάλεξη 6

Μέθοδος Εκθετικής Εξομάλυνσης
(Exponential Smoothing)

- Μέθοδος πρόβλεψης η οποία βασίζεται στην εξομάλυνση των ιστορικών δεδομένων
- Προβλέπει υπολογίζοντας το μέσο όρο των δεδομένων, χρησιμοποιώντας ωστόσο εκθετικούς συντελεστές βαρύτητας
- Τα πιο πρόσφατα δεδομένα έχουν μεγαλύτερη βαρύτητα
- Στόχος είναι η απομόνωση του προτύπου των δεδομένων από τις τυχαίες διακυμάνσεις
- Χρησιμοποιείται κυρίως για βραχυπρόθεσμες προβλέψεις
- Είναι εύκολη στην χρήση
- Απαιτεί ελάχιστα ιστορικά δεδομένα και έχει μικρό υπολογιστικό κόστος

FSU

Μοντέλα Εκθετικής Εξομάλυνσης



- **Σταθερού Επιπέδου**
  - ✓ Για πρόβλεψη της επόμενης περιόδου
  - ✓ Για χρονοσειρές που περιέχουν υψηλό θόρυβο ή τυχαιότητα
- **Γραμμικής τάσης**
  - ✓ Για σταθερή, γραμμική μεταβολή επιπέδου
- **Εκθετικής τάσης**
  - ✓ Για εκθετική μεταβολή επιπέδου
- **Φθίνουσας τάσης**
  - ✓ Για μεσοπρόθεσμες προβλέψεις

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Χρόνος t	Δεδομένα X_t	Πρόβλεψη F $\hat{X}_{t-1}(1)$	Σφάλμα e_t	Επίπεδο στο τέλος της περιόδου t $S_t = S_{t-1} + h_1 e_t$
0				S0 = 585
1	545	585	-40	S1 = 585 + 0.4(-40) = 569
2	635	569	66	S2 = 569 + 0.4(6.6) = 595.4
3	420	595,4	-175,4	S3 = 595.4 + 0.4(-175.4) = 525.2
4	716	525,2	190,8	S4 = 525.2 + 0.4(190.8) = 601.5
5	699	601,5	97,5	S5 = 601.5 + 0.4(97,5) = 640.5
6	681	640,5	40,5	S6 = 640,5 + 0.4(40.5) = 656.5
7	763	656,5	106,3	S7 = 656.5 + 0.4(106.3) = 699.2
8	778	699,2	78,8	S8 = 699.2 + 0.4(78.8) = 730.5
9	690	730,5	-40,5	S9 = 730.5 + 0.4(-40.5) = 711.4
10	707	711,4	-7,4	S10 = 711.4 + 0.4(-7.4) = 711.5
11	716	711,5	4,5	S11 = 711.5 + 0.4(4.5) = 713.3
12		713,3		

$$e_t = Y_t - F_t$$

$$S_t = S_{t-1} + \alpha \cdot e_t$$

$$F_{t+1} = S_t$$

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Εξίσωση Σφάλματος

$$e = Y_{t-1} - F_{t-1}$$

Εξίσωση Επιπέδου & Πρόβλεψης

$$F_t = F_{t-1} + \alpha e$$

$$F_t = F_{t-1} + \alpha(Y_{t-1} - F_{t-1})$$

$$F_t = \alpha Y_{t-1} + (1-\alpha)F_{t-1}$$

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Εξίσωση Σφάλματος

$F_t = \alpha Y_{t-1} + (1-\alpha)F_{t-1}$

Εξίσωση Επιπέδου & Πρόβλεψης

$e = Y_{t-1} - F_{t-1}$

$F_{t+1} = \alpha Y_t + (1-\alpha)F_t$

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)\, Y_{t-1} + (1-\alpha)^2\, F_{t-1}$$

Ομοίως αντικαθιστώντας στην (3) το F_{t-1}, κοκ , προκύπτει:

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)\, Y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2\, Y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3\, Y_{t-3}\, \alpha(1-\alpha)^4\, Y_{t-4} + \dots$$

$$\dots + \alpha(1-\alpha)^{t-1}\, Y_1 + (1-\alpha)^t F_1$$

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Παρατηρούμε ότι:

- Οι συντελεστές (βάρη) των ιστορικών δεδομένων Y μειώνονται εκθετικά
- Ο τελευταίος όρος είναι ο $(1\text{-}\alpha)^t F_1$. Αυτό σημαίνει ότι η αρχική πρόβλεψη παίζει ρόλο σε όλες τις επόμενες προβλέψεις. Στο παράδειγμα μας υπολογίζονται τα βάρη για t = 11, ισχύει :

$(1\text{-}\alpha)^t = 0.3138$, αν $\alpha=0.1$

$(1\text{-}\alpha)^t = 0.0004$, αν $\alpha=0.5$

$(1\text{-}\alpha)^t = 0.0000$, αν $\alpha=0.9$

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

- ✓ Όσο μικρότερη τιμή *α* επιλέξουμε, τόσο μεγαλύτερο ρόλο παίζει η πρώτη τιμή της πρόβλεψης που θα ορίσουμε ως F1
- ✓ Όσο περισσότερα δεδομένα έχουμε, τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του t, οπότε τόσο μικρότερο είναι και το βάρος της F1

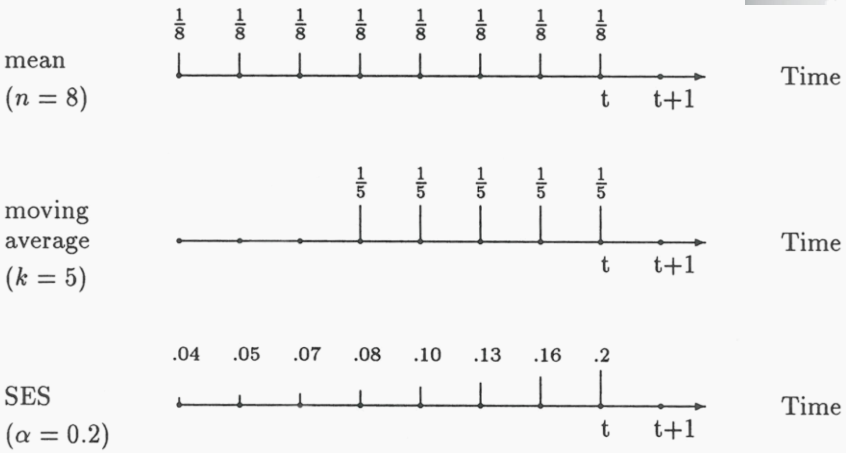
Π.χ. για t = 12 και α=0.1 το βάρος ισούται με 0.2824

για t = 24 και α=0.1 το βάρος ισούται με 0.0798

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Weight assigned to:	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$
Y_t	0.2	0.4	0.6	0.8
Y_{t-1}	0.16	0.24	0.24	0.16
Y_{t-2}	0.128	0.144	0.096	0.032
Y_{t-3}	0.1024	0.0864	0.0384	0.0064
Y_{t-4}	$(0.2)(0.8)^4$	$(0.4)(0.6)^4$	$(0.6)(0.4)^4$	$(0.8)(0.2)^4$



Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Σαν αρχική πρόβλεψη συνήθως χρησιμοποιούμε:

- ✓ Μέσος όρος των παρατηρήσεων
- ✓ Μέσος όρος των τεσσάρων ή πέντε πρώτων παρατηρήσεων
- ✓ Πρώτη παρατήρηση
- ✓ Σταθερό επίπεδο από μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Εξομάλυνσης

- ✓ Η βέλτιστη τιμή του *α* καθορίζεται από την ελαχιστοποίηση του insample σφάλματος (MSE, MAPE κτλ.)
- ✓ Το βέλτιστο *α* ενδέχεται να είναι διαφορετικό, ανάλογα με το κριτήριο που επιλέγεται
- ✓ Το *α* κυμαίνεται στο διάστημα [0,1]

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Παράδειγμα

t	Y
0	
1	200
2	135
3	195
4	197,5
5	310
6	175
7	155
8	130
9	220
10	277,5
11	235
12	???

- Μηνιαία δεδομένα t
- Αριθμός μηνιαίων φορτώσεων Y_t

Ζητείται η πρόβλεψη του Δεκεμβρίου

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Παράδειγμα

(Y1+Y2)/2

t	Y	F	e	S = F + a*e	S = a*Y + (1-a)*F	S
0						167,5
1	200	167,5	32,5	167,5 + 0.2 * 32,5	0.2 * 200 + 0.8 * 167,5	174,0
2	135	174,0	-39,0	174 + 0.2 * -39	0.2 * 135 + 0.8 * 174	166,2
3	195	166,2	28,8	166,2 + 0.2 * 28,8	0.2 * 195 + 0.8 * 166,2	172,0
4	197,5	172,0	25,5	172 + 0.2 * 25,5	0.2 * 197,5 + 0.8 * 172	177,1
5	310	177,1	132,9	177,1 + 0.2 * 132,9	0.2 * 310 + 0.8 * 177,1	203,7
6	175	203,7	-28,7	203,7 + 0.2 * -28,7	0.2 * 175 + 0.8 * 203,7	197,9
7	155	197,9	-42,9	197,9 + 0.2 * -42,9	0.2 * 155 + 0.8 * 197,9	189,3
8	130	189,3	-59,3	189,3 + 0.2 * -59,3	0.2 * 130 + 0.8 * 189,3	177,5
9	220	177,5	42,5	177,5 + 0.2 * 42,5	0.2 * 220 + 0.8 * 177,5	186,0
10	277,5	186,0	91,5	186 + 0.2 * 91,5	0.2 * 277,5 + 0.8 * 186	204,3
11	235	204,3	30,7	204,3 + 0.2 * 30,7	0.2 * 235 + 0.8 * 204,3	210,4
12	???	210,4				

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Παράδειγμα

α = 0.5

t	Y	F	e	S
0				167,5
1	200	167,5	32,5	183,8
2	135	183,8	-48,8	159,4
3	195	159,4	35,6	177,2
4	197,5	177,2	20,3	187,3
5	310	187,3	122,7	248,7
6	175	248,7	-73,7	211,8
7	155	211,8	-56,8	183,4
8	130	183,4	-53,4	156,7
9	220	156,7	63,3	188,4
10	277,5	188,4	89,1	232,9
11	235	232,9	2,1	234,0
12	???	234,0		

α = 0.8

t	Y	F	e	S
0				167,5
1	200	167,5	32,5	193,5
2	135	193,5	-58,5	146,7
3	195	146,7	48,3	185,3
4	197,5	185,3	12,2	195,1
5	310	195,1	114,9	287,0
6	175	287,0	-112,0	197,4
7	155	197,4	-42,4	163,5
8	130	163,5	-33,5	136,7
9	220	136,7	83,3	203,3
10	277,5	203,3	74,2	262,7
11	235	262,7	-27,7	240,5
12	???	240,5		

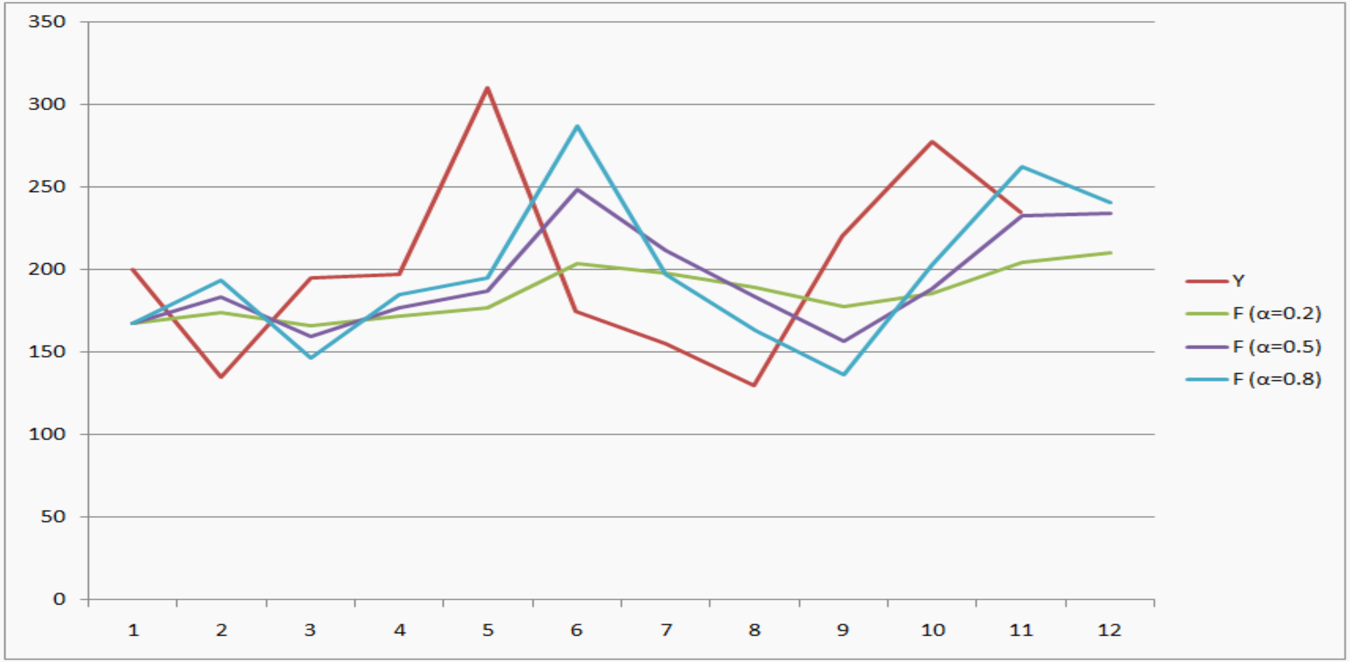
Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Παράδειγμα

t	Y	F (α=0.2)	E	AE	APE	SAPE
1	200	167,5	32,50	32,50	0,163	0,177
2	135	174,0	-39,00	39,00	0,289	0,252
3	195	166,2	28,80	28,80	0,148	0,159
4	197,5	172,0	25,54	25,54	0,129	0,138
5	310	177,1	132,93	132,93	0,429	0,546
6	175	203,7	-28,65	28,65	0,164	0,151
7	155	197,9	-42,92	42,92	0,277	0,243
8	130	189,3	-59,34	59,34	0,456	0,372
9	220	177,5	42,53	42,53	0,193	0,214
10	277,5	186,0	91,52	91,52	0,330	0,395
11	235	204,3	30,72	30,72	0,131	0,140
12		210,4				
		α=0.2	19,51	**50,41**	**0,25**	**0,25**
		α=0.5	12,08	54,39	0,27	0,27
		α=0.8	**8,30**	58,13	0,29	0,29

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Παράδειγμα



Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Παράδειγμα

Η μεγαλύτερη τιμή του α (0.8) εξομαλύνει πολύ λίγο τη χρονοσειρά ενώ η μικρότερη (0.2) δίνει την καλύτερη εξομάλυνση

Αν α = 1, τότε η εκθετική εξομάλυνση γίνεται ισοδύναμη με τη Naive, ενώ αν α = 0 τότε η πρόβλεψή μας είναι σταθερή και ίση με την αρχική πρόβλεψη.

Μοντέλο Γραμμικής Τάσης (Holt)

$$e_t = Y_t - F_t$$
$$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + a * e_t$$
$$T_t = T_{t-1} + b * e_t$$
$$\mathrm{F}_{t+m} = S_t + mT_t$$

- ✓ Χρειάζεται προσοχή στην αρχικοποίηση του μοντέλου
- ✓ Ως αρχικό επίπεδο *συνήθως* ορίζεται η σταθερά A της γραμμικής παλινδρόμησης
- ✓ Ως αρχική τάση *συνήθως* ορίζεται η κλίση B της γραμμικής παλινδρόμησης

Μοντέλο Γραμμικής Τάσης (Holt)

$$e_t = Y_t - F_t$$
$$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + a * e_t$$
$$T_t = T_{t-1} + b * e_t$$
$$\mathrm{F}_{t+m} = S_t + mT_t$$

Οι συντελεστές α και β επιλέγονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), όπου 0<a<1 και 0<β<a

Η αρχικοποίηση του επιπέδου και της τάσης θα μπορούσε να γίνει εναλλακτικά:

- **Αρχικό Επίπεδο**
  - Πρώτη Παρατήρηση
  - Μέσος Όρος Ν πρώτων παρατηρήσεων
- **Αρχική Τάση**
  - Διαφορά δεύτερης και πρώτης παρατήρησης:$(X_2\text{-}X_1)$
  - Διαφορά ν-στής και πρώτης παρατήρησης διαιρεμένης με ν-1: $(X_4\text{-}X_1)/3$

FSU

Μοντέλο Γραμμικής Τάσης (Holt)

$e_t = Y_t - F_t$

$$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + \alpha \cdot e_t$$

$$T_t = T_{t-1} + \beta \cdot e_t$$

$$F_{t+m} = S_t + m \cdot T_t$$

$h_1 = 0.20,\ h_2 = 0.10$

Time t	Data X_t	Forecast $X_{t-1}(1)$	Error e_t	Level at End of t $S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + h_1 e_t$	Trend at End of t $T_t = T_{t-1} + h_2 e_t$	Forecast for $t+1$ $\hat{X}_t(1) = S_t + T_t$
0				$S_0 = 54.0$	$T_0 = 2.0$	$\hat{X}_0(1) = 54.0 + 2.0 = 56.0$
1	54.0	56.0	−2.0	$S_1 = 54.0 + 2.0 + 0.2(-2.0) = 55.6$	$T_1 = 2.0 + 0.1(-2.0) = 1.8$	$\hat{X}_1(1) = 55.6 + 1.8 = 57.4$
2	55.0	57.4	−2.4	$S_2 = 55.6 + 1.8 + 0.2(-2.4) = 56.9$	$T_2 = 1.8 + 0.1(-2.4) = 1.6$	$\hat{X}_2(1) = 56.9 + 1.6 = 58.5$
3	57.0	58.5	−1.5	$S_3 = 56.9 + 1.6 + 0.2(-1.5) = 58.2$	$T_3 = 1.6 + 0.1(-1.5) = 1.5$	$\hat{X}_3(1) = 58.2 + 1.5 = 59.7$
4	60.0	59.7	0.3	$S_4 = 58.2 + 1.5 + 0.2(0.3) = 59.8$	$T_4 = 1.5 + 0.1(0.3) = 1.5$	$\hat{X}_4(1) = 59.8 + 1.5 = 61.3$
5	66.0	61.3	4.7	$S_5 = 59.8 + 1.5 + 0.2(4.7) = 62.2$	$T_5 = 1.5 + 0.1(4.7) = 2.0$	$\hat{X}_5(1) = 62.2 + 2.0 = 64.2$
6	62.0	64.2	−2.2	$S_6 = 62.2 + 2.0 + 0.2(-2.2) = 63.8$	$T_6 = 2.0 + 0.1(-2.2) = 1.8$	$\hat{X}_6(1) = 63.8 + 1.8 = 65.6$
7	59.0	65.6	−6.6	$S_7 = 63.8 + 1.8 + 0.2(-6.6) = 64.3$	$T_7 = 1.8 + 0.1(-6.6) = 1.1$	$\hat{X}_7(1) = 64.3 + 1.1 = 65.4$
8	65.0	65.4	−0.4	$S_8 = 64.3 + 1.1 + 0.2(-0.4) = 65.3$	$T_8 = 1.1 + 0.1(-0.4) = 1.1$	$\hat{X}_8(1) = 65.3 + 1.1 = 66.4$
9	69.0	66.4	2.6	$S_9 = 65.3 + 1.1 + 0.2(2.6) = 66.9$	$T_9 = 1.1 + 0.1(2.6) = 1.4$	$\hat{X}_9(1) = 66.9 + 1.4 = 68.3$
10	70.0	68.3	1.7	$S_{10} = 66.9 + 1.4 + 0.2(1.7) = 68.6$	$T_{10} = 1.4 + 0.1(1.7) = 1.6$	$\hat{X}_{10}(1) = 68.6 + 1.6 = 70.2$
11	63.0	70.2	−7.2	$S_{11} = 68.6 + 1.6 + 0.2(-7.2) = 68.8$	$T_{11} = 1.6 + 0.1(-7.2) = 0.9$	$\hat{X}_{11}(1) = 68.8 + 0.9 = 69.7$
12	75.0	69.7	5.3	$S_{12} = 68.8 + 0.9 + 0.2(5.3) = 70.8$	$T_{12} = 0.9 + 0.1(5.3) = 1.4$	$\hat{X}_{12}(1) = 70.8 + 1.4 = 72$
13		72.2				

Μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης (Damped)

$$e_t = Y_t - F_t$$
$$S_t = S_{t-1} + \varphi T_{t-1} + a * e_t$$
$$T_t = \varphi T_{t-1} + b * e_t$$
$$\mathrm{F}_{t+m} = S_t + \sum_{i=1}^{m} \varphi^i \, T_t$$

➢Χρειάζεται προσοχή στην αρχικοποίηση του μοντέλου

➢Ως αρχικό επίπεδο ορίζεται η σταθερά Α της γραμμικής παλινδρόμησης.

➢ Ως αρχική τάση ορίζεται η κλίση b της γραμμικής παλινδρόμησης.

FSU

Μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης (Damped)

$$e_t = Y_t - F_t$$
$$S_t = S_{t-1} + \varphi T_{t-1} + a * e_t$$
$$T_t = \varphi T_{t-1} + b * e_t$$
$$\mathrm{F}_{t+m} = S_t + \sum_{i=1}^{m} \varphi^i \, T_t$$

Οι συντελεστές α και β επιλέγονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), όπου 0<α<1 και 0<β<α

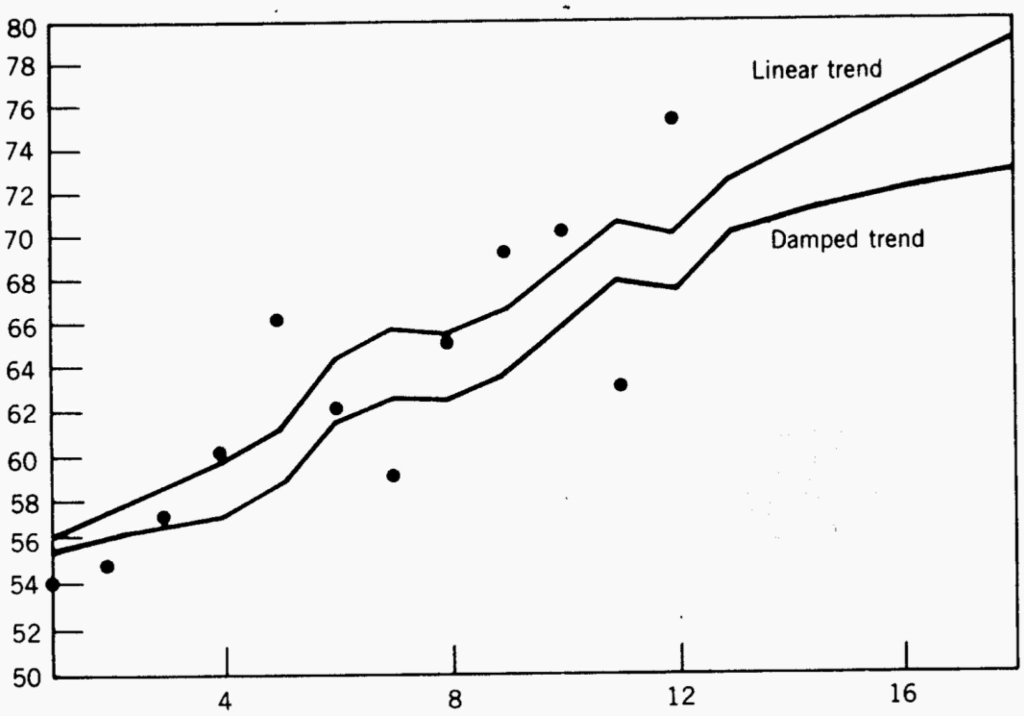
- Το μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα αυτόματο μοντέλο πρόβλεψης για κάθε μη εποχιακή χρονοσειρά, ανάλογα με τον damping factor που θα επιλέξουμε:
  - $\phi \approx 0$,σταθερού επιπέδου
  - $\phi < 1$,φθίνουσας τάσης
  - $\phi \approx 1$,γραμμικής τάσης
  - $\phi > 1$,εκθετικής τάσης

Μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης (Damped)

$h_1 = 0.2, \quad h_2 = 0.1, \quad \varphi = 0.8$

Time t	Data X_t	Forecast $X_{t-1}(1)$	Error e_t	Level at End of t: $S_t = S_{t-1} + \phi T_{t-1} + h_1 e_t$	Trend at End of t: $T_t = \phi T_{t-1} + h_2 e_t$	Forecast for $t+1$: $\hat{X}_t(1) = S_t + \phi T_t$
0				$S_0 = 54.0$	$T_0 = 2.0$	$\hat{X}_0(1) = 54.0 + 0.8(2.0) = 55.6$
1	54.0	55.6	−1.6	$S_1 = 54.0 + 0.8(2.0) + 0.2(-1.6) = 55.3$	$T_1 = 0.8(2.0) + 0.1(-1.6) = 1.4$	$\hat{X}_1(1) = 55.3 + 0.8(1.4) = 56.4$
2	55.0	56.4	−1.4	$S_2 = 55.3 + 0.8(1.4) + 0.2(-1.4) = 56.1$	$T_2 = 0.8(1.4) + 0.1(-1.4) = 1.0$	$\hat{X}_2(1) = 56.1 + 0.8(1.0) = 56.9$
3	57.0	56.9	0.1	$S_3 = 56.1 + 0.8(1.0) + 0.2(0.1) = 56.9$	$T_3 = 0.8(1.0) + 0.1(0.1) = 0.8$	$\hat{X}_3(1) = 56.9 + 0.8(0.8) = 57.5$
4	60.0	57.5	2.5	$S_4 = 56.9 + 0.8(0.8) + 0.2(2.5) = 58.0$	$T_4 = 0.8(0.8) + 0.1(2.5) = 0.9$	$\hat{X}_4(1) = 58.0 + 0.8(0.9) = 58.7$
5	66.0	58.7	7.3	$S_5 = 58.0 + 0.8(0.9) + 0.2(7.3) = 60.2$	$T_5 = 0.8(0.9) + 0.1(7.3) = 1.5$	$\hat{X}_5(1) = 60.2 + 0.8(1.5) = 61.4$
6	62.0	61.4	0.6	$S_6 = 60.2 + 0.8(1.5) + 0.2(0.6) = 61.5$	$T_6 = 0.8(1.5) + 0.1(0.6) = 1.3$	$\hat{X}_6(1) = 61.5 + 0.8(1.3) = 62.5$
7	59.0	62.5	−3.5	$S_7 = 61.5 + 0.8(1.3) + 0.1(-3.5) = 61.8$	$T_7 = 0.8(1.3) + 0.1(-3.5) = 0.7$	$\hat{X}_7(1) = 61.8 + 0.8(0.7) = 62.4$
8	65.0	62.4	2.6	$S_8 = 61.8 + 0.8(0.7) + 0.2(2.6) = 62.9$	$T_8 = 0.8(0.7) + 0.1(2.6) = 0.8$	$\hat{X}_8(1) = 62.9 + 0.8(0.8) = 63.5$
9	69.0	63.5	5.5	$S_9 = 62.9 + 0.8(0.8) + 0.2(5.5) = 64.6$	$T_9 = 0.8(0.8) + 0.1(5.5) = 1.2$	$\hat{X}_9(1) = 64.6 + 0.8(1.2) = 65.6$
10	70.0	65.6	4.4	$S_{10} = 64.6 + 0.8(1.2) + 0.2(4.4) = 66.5$	$T_{10} = 0.8(1.2) + 0.1(4.4) = 1.4$	$\hat{X}_{10}(1) = 66.5 + 0.8(1.4) = 67.6$
11	63.0	67.6	−4.6	$S_{11} = 66.5 + 0.8(1.4) + 0.2(-4.6) = 66.7$	$T_{11} = 0.8(1.4) + 0.1(-4.6) = 0.7$	$\hat{X}_{11}(1) = 66.7 + 0.8(0.7) = 67.3$
12	75.0	67.3	7.7	$S_{12} = 66.7 + 0.8(0.7) + 0.2(7.7) = 68.8$	$T_{12} = 0.8(0.7) + 0.1(7.7) = 1.3$	$\hat{X}_{12}(1) = 68.8 + 0.8(1.3) = 69.8$
13		69.8				

Σύγκριση Μοντέλων Γραμμικής & Μη Γραμμικής Τάσης



Εποχιακή Εξομάλυνση

Αν τα δεδομένα έχουν εποχιακό πρότυπο, τότε στα μη εποχιακά μοντέλα προστίθεται ένας εποχιακός παράγοντας (index) για κάθε περίοδο του έτους.

- Αφαίρεση Προσθετικής Εποχιακότητας
  - actual data - index = deseasonalized data

- Αφαίρεση Πολλαπλασιαστικής Εποχιακότητας
  - actual data / index = deseasonalized data

➢ Οι ίδιες εξισώσεις μπορούν να αξιοποιηθούν για την εποχικοποίηση των προβλέψεων

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου με Πολ/κή Εποχιακότητα

$$e_t = Y_t - F_t$$

$$S_t = S_{t-1} + \frac{\alpha \cdot e_t}{I_{t-p}}$$

$$I_t = I_{t-p} + \frac{\gamma \cdot e_t}{S_t}$$

$$F_{t+m} = S_t \cdot I_{t-p+m}$$

Αρχικοποίηση μοντέλου

1. Υπολογισμός αρχικών εποχιακών συντελεστών.
   - Χρήση μοντέλου αποσύνθεσης.
2. Υπολογισμός S_o και T_o
3. Υπολογισμός των παραμέτρων εξομάλυνσης.
   - Χρήση γραμμικής μεθόδου αναζήτησης βέλτιστων παραμέτρων εξομάλυνσης ή της μεθόδου grid search

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου με Πολ/κή Εποχιακότητα

$h_1 = 0.1, \qquad h_3 = 0.01$

Time t	Data X_t	Forecast $\hat{X}_{t-1}(1)$	Error e_t	Deseasonalized Level at End of t $S_t = S_{t-1} + h_1 e_t / I_{t-p}$	Seasonal Index at End of t $I_t = I_{t-p} + h_3 e_t / S_t$	Forecast for $t+1$ $\hat{X}_t(1) = S_t(I_{t-p+1})$
−3					$I_{-3} = 0.6122$	
−2					$I_{-2} = 1.0086$	
−1					$I_{-1} = 1.3303$	
0				$S_0 = 74.3$	$I_0 = 1.0489$	$\hat{X}_0(1) = 74.3(0.6122) = 45.5$
1	53.0	45.5	7.5	$S_1 = 74.3 + 0.1(7.5)/0.6122 = 75.5$	$I_1 = 0.6122 + 0.01(7.5)/75.5 = 0.6132$	$\hat{X}_1(1) = 75.5(1.0086) = 76.2$
2	85.0	76.2	8.8	$S_2 = 75.5 + 0.1(8.8)/1.0086 = 76.4$	$I_2 = 1.0086 + 0.01(8.8)/76.4 = 1.0098$	$\hat{X}_2(1) = 76.4(1.3303) = 101.6$
3	92.0	101.6	−9.6	$S_3 = 76.4 + 0.1(-9.6)/1.3303 = 75.7$	$I_3 = 1.3303 + 0.01(-9.6)/75.7 = 1.3290$	$\hat{X}_3(1) = 75.7(1.0489) = 79.4$
4	78.0	79.4	−1.4	$S_4 = 75.7 + 0.1(-1.4)/1.0489 = 75.5$	$I_4 = 1.0489 + 0.01(-1.4)/75.5 = 1.0487$	$\hat{X}_4(1) = 75.5(0.6132) = 46.3$
5	44.0	46.3	−2.3	$S_5 = 75.5 + 0.1(-2.3)/0.6132 = 75.2$	$I_5 = 0.6132 + 0.01(-2.3)/75.2 = 0.6129$	$\hat{X}_5 = 5.2(1.0098) = 75.9$
6	75.0	75.9	−0.9	$S_6 = 75.2 + 0.1(-0.9)/1.0098 = 75.1$	$I_6 = 1.0098 + 0.01(-0.9)/75.1 = 1.0096$	$\hat{X}_6(1) = 75.1(1.3290) = 99.8$
7	102.0	99.8	2.2	$S_7 = 75.1 + 0.1(2.2)/1.3290 = 75.2$	$I_7 = 1.3290 + 0.01(2.2)/75.2 = 1.3293$	$\hat{X}_7(1) = 75.2(1.0487) = 78.9$
8	60.0	78.9	−18.9	$S_8 = 75.2 + 0.1(-18.9)/1.0487 = 73.4$	$I_8 = 1.0487 + 0.01(-18.9)/73.4 = 1.0461$	$\hat{X}_8(1) = 73.4(0.6129) = 45.0$
9	55.0	45.0	10.0	$S_9 = 73.4 + 0.1(10.0)/0.6129 = 75.1$	$I_9 = 0.6129 + 0.01(10.0)/75.1 = 0.6142$	$\hat{X}_9(1) = 75.1(1.0096) = 75.8$
10	88.0	75.8	12.2	$S_{10} = 75.1 + 0.1(12.2)/1.0096 = 76.3$	$I_{10} = 1.0096 + 0.01(12.2)/76.3 = 1.0112$	$\hat{X}_{10}(1) = 76.3(1.3293) = 101.4$
11	108.0	101.4	6.6	$S_{11} = 76.3 + 0.1(6.6)/1.3293 = 76.8$	$I_{11} = 1.3293 + 0.01(6.6)/76.8 = 1.3302$	$\hat{X}_{11}(1) = 76.8(1.0461) = 80.3$
12	59.0	80.3	−21.3	$S_{12} = 76.8 + 0.1(-21.3)/1.0461 = 74.7$	$I_{12} = 1.0461 + 0.01(-21.3)/74.7 = 1.0433$	$\hat{X}_{12}(1) = 74.7(0.6142) = 45.9$
13		45.9				

FSU

Έκφραση της εκθετικής εξομάλυνσης μέσω state – space μοντέλων

- Κάθε μοντέλο περιγράφει το τρόπο με τον οποίο οι ιστορικές παρατηρήσεις της χρονοσειράς αλληλοεπιδρούν προκειμένου να μεταβούμε στην επόμενη χρονικά παρατήρηση
- Οι εξισώσεις μετάβασης αναλύουν τη χρονοσειρά στις συνιστώσες επιπέδου, τάσης και εποχιακότητας
- Για κάθε μέθοδο υπάρχουν δύο μοντέλα, ανάλογα με το σφάλμα υπολογισμού:
  - Προσθετικά μοντέλα
  - Πολλαπλασιαστικά μοντέλα

ETS (Error, Trend, Seasonal)

- Error: {A,M}
- Trend:{N, A, A_d, M, M_d}
- Seasonal:{N, A, M}
- Συνεπώς, συνολικά υπάρχουν 30 state space models

Ταξινόμηση των μεθόδων Εκθετικής Εξομάλυνσης

(N,N)	=	simple exponential smoothing
(A,N)	=	Holts linear method
(M,N)	=	Exponential trend method
(A_d,N)	=	additive damped trend method
(M_d,N)	=	multiplicative damped trend method
(A,A)	=	additive Holt-Winters method
(A,M)	=	multiplicative Holt-Winters method
(A_d,M)	=	Holt-Winters damped method

	Seasonal Component		
Trend	N	A	M
Component	(None)	(Additive)	(Multiplicative)
N (None)	(N,N)	(N,A)	(N,M)
A (Additive)	(A,N)	(A,A)	(A,M)
A_d (Additive damped)	(A_d,N)	(A_d,A)	(A_d,M)
M (Multiplicative)	(M,N)	(M,A)	(M,M)
M_d (Multiplicative damped)	(M_d,N)	(M_d,A)	(M_d,M)

Exponential Smoothing Using R

```
ses(x, h=10, level=c(80,95),
alpha=NULL, …)

holt(x, h=10, damped=FALSE,
level=c(80,95),
exponential=FALSE,
alpha=NULL, beta=NULL, …)
```

x	a numeric vector or time series
h	Number of periods for forecasting.
damped	If TRUE, use a damped trend.
seasonal	Type of seasonality in hw model. "additive" or "multiplicative"
level	Confidence level for prediction intervals.
initial	Method used for selecting initial state values. If optimal, the initial values are optimized along with the smoothing parameters using ets. If simple, the initial values are set to values obtained using simple calculations on the first few observations. See Hyndman & Athanasopoulos (2012) for details.
exponential	If TRUE, an exponential trend is fitted. Otherwise, the trend is (locally) linear.
alpha	Value of smoothing parameter for the level. If NULL, it will be estimated.
beta	Value of smoothing parameter for the trend. If NULL, it will be estimated.
gamma	Value of smoothing parameter for the seasonal component. If NULL, it will be estimated.

Exponential Smoothing Using R

An object of class "forecast" is a list containing the following elements:

model	A list containing information about the fitted model
method	The name of the forecasting method as a character string
mean	Point forecasts as a time series
lower	Lower limits for prediction intervals
upper	Upper limits for prediction intervals
level	The confidence values associated with the prediction intervals
x	The original time series (either object itself or the time series used to create the model stored as object).
residuals	Residuals from the fitted model. That is x minus fitted values.
fitted	Fitted values (one-step forecasts)

Exponential Smoothing Using R

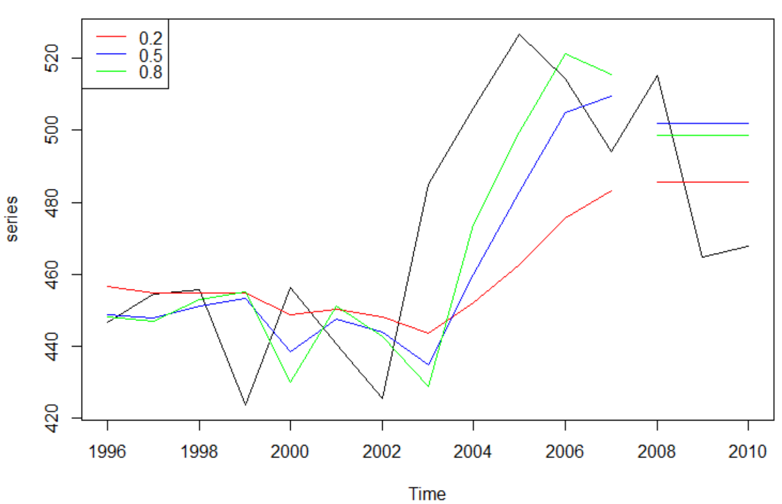
```
library(forecast)
library(fpp)
#Create train and test data sets
series <- window(oil, start=1996, end=2010)
insample <- window(oil, start=1996, end=2007)
outsample <- window(oil, start=2008, end=2010)

#Fit SES with different smoothing parameters
ses_1 <- ses(insample, alpha = 0.2, h=3)
ses_2 <- ses(insample, alpha = 0.5, h=3)
ses_3 <- ses(insample, alpha = 0.8, h=3)

plot(series)
lines(ses_1$fitted, col="red") #Plot in-sample forecasts
lines(ses_2$fitted, col="blue")
lines(ses_3$fitted, col="green")

lines(ses_1$mean, col="red") #Plot out-of-sample forecasts
lines(ses_2$mean, col="blue")
lines(ses_3$mean, col="green")

legend("topleft", legend=c("0.2","0.5","0.8"), col=c("red","blue","green"),
lty=1)
```



Exponential Smoothing Using R

```
#Compute in-sample RMSE
rmse_1 <- sqrt(mean((ses_1$fitted-insample)^2))
rmse_2 <- sqrt(mean((ses_2$fitted-insample)^2))
rmse_3 <- sqrt(mean((ses_3$fitted-insample)^2))

c(rmse_1, rmse_2, rmse_3)

31.77330 26.75209 25.20049

optimal_model <- ses(insample, h=3)
accuracy(optimal_model)

                   ME     RMSE      MAE       MPE        MAPE     MASE       ACF1
Training set 4.578965 25.12207 20.05824 0.8092458 4.25209 0.924515 -0.0388482

optimal_model$model$par

  alpha          l
  0.891956 447.483644      #Optimal a and So values
```

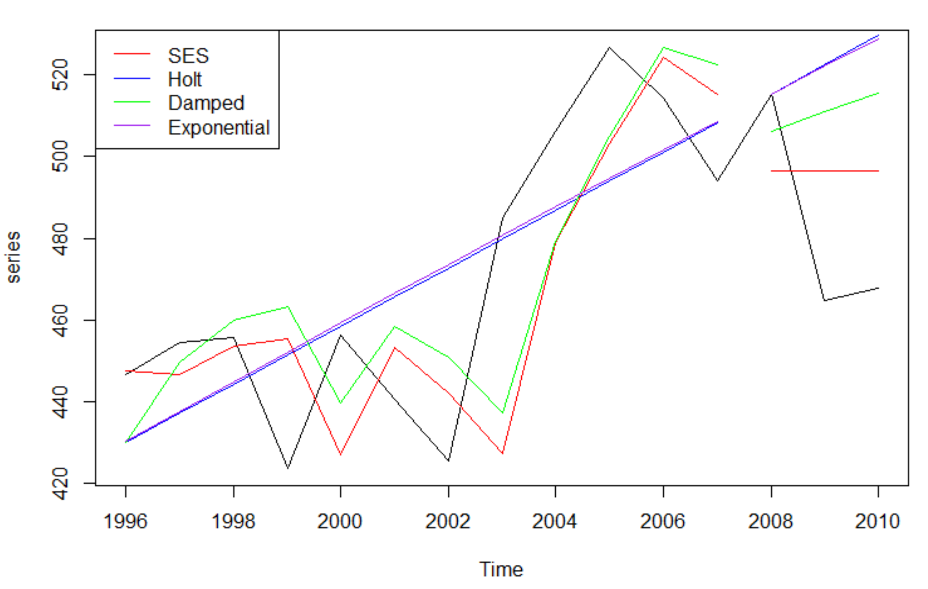
Exponential Smoothing Using R

```
#Fit various exponential smoothing models
m_ses <- ses(insample, h=3)
m_holt <- holt(insample, h=3)
m_damped <- holt(insample, damped=TRUE, h=3)
m_exp <- holt(insample, damped=TRUE,
exponential = TRUE, h=3)

plot(series)
lines(m_ses$fitted, col="red")
lines(m_holt$fitted, col="blue")
lines(m_damped$fitted, col="green")
lines(m_exp$fitted, col="purple")

lines(m_ses$mean, col="red")
lines(m_holt$mean, col="blue")
lines(m_damped$mean, col="green")
lines(m_exp$mean, col="purple")

legend("topleft",
legend=c("SES","Holt","Damped","Exponential")
, col=c("red","blue","green","purple"),
lty=1)
```



Exponential Smoothing Using R

```
#Compute in-sample RMSE

rmse_ses <- sqrt(mean((m_ses$fitted-insample)^2))
rmse_holt <- sqrt(mean((m_holt$fitted-insample)^2))
rmse_damped <- sqrt(mean((m_damped$fitted-insample)^2))
rmse_exp <- sqrt(mean((m_exp$fitted-insample)^2))

c(rmse_ses, rmse_holt, rmse_damped, rmse_exp)

25.12207 22.71055 25.12984 22.82899

optimal_model <- ets(insample)
optimal_model

ETS(A,N,N)
Smoothing parameters:     #The optimal model according to the
    alpha = 0.8921        ETS algorithm is SES
  Initial states:
    l = 447.4765
```

Further Reading

- https://www.otexts.org/fpp/7/7
- Επιχειρησιακές Προβλέψεις, Πετρόπουλος Φ., Ασημακόπουλος Β., Αθήνα 2012
- Gardner Jr, E. S. (1985). Exponential smoothing: The state of the art. *Journal of Forecasting* **4**(1), 1–28.
- Gardner Jr, E. S. (2006). Exponential smoothing: The state of the art—Part II.*International Journal of Forecasting* **22**(4), 637–666.
- Hyndman, R. J., A. B. Koehler, J. K. Ord and R. D. Snyder (2008). *Forecasting with exponential smoothing: the state space approach*. Berlin: Springer-Verlag.

FSU

Feel free to say hi!

We are friendly and social

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφος
Αττική, 15780, Ελλάδα
Τηλέφωνο: 2107723637 Fax: 2107723740

Κτίριο της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
2ος όροφος - 2.2.1 Εργαστήριο

@FSU NTUA

Μονάδα Προβλέψεων και Στρατηγικής ΕΜΠ

spiliotis@fsu.gr

FSU