



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Μονάδα Προβλέψεων & Στρατηγικής
Forecasting & StrategyUnit

Τεχνικές Προβλέψεων

Εκθετική Εξομάλυνση (I)

Κινητοί Μέσοι Όροι για πρόβλεψη

| Περίοδος | Δεδομένα | ΚΜΟ(3) | ΚΜΟ(5) |
|----------|----------|--------|--------|
| 1 | 106,5 | | |
| 2 | 109,2 | | |
| 3 | 117,8 | | |
| 4 | 117,2 | 111,17 | |
| 5 | 116,9 | 114,73 | |
| 6 | 118,7 | 117,30 | 113,52 |
| 7 | 115,6 | 117,60 | 115,96 |
| 8 | 119,0 | 117,07 | 117,24 |
| 9 | 134,7 | 117,77 | 117,48 |
| 10 | 130,4 | 123,10 | 120,98 |
| 11 | 126,2 | 128,03 | 123,68 |
| 12 | | 130,43 | 125,18 |

$$F_{t+1} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=t-k+1}^t Y_i$$

Εκθετική Εξομάλυνση (Exponential Smoothing)

- Μέθοδος πρόβλεψης η οποία εξομαλύνει τα ιστορικά δεδομένα.
- Υπολογίζεται ο μέσος όρος των δεδομένων, με την χρήση συντελεστών βαρύτητας.
- Τα πιο πρόσφατα δεδομένα έχουν μεγαλύτερη βαρύτητα.
- Οι συντελεστές βαρύτητας μειώνονται με εκθετικό τρόπο, όσο παλαιότερα είναι τα δεδομένα.
- Στόχος η απομόνωση του προτύπου των δεδομένων από τις τυχαίες διακυμάνσεις.



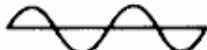







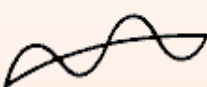
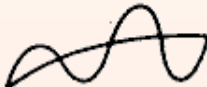
Εκθετική Εξομάλυνση (Exponential Smoothing)

- Χρησιμοποιείται ευρέως για βραχυπρόθεσμο σχεδιασμό.
- Είναι σχετικά εύκολη στην χρήση.
- Απαιτεί ελάχιστα ιστορικά δεδομένα και χρόνο υπολογισμού.
- Είναι ικανοποιητικά ακριβής σε σχέση με πολυπλοκότερες μεθόδους πρόβλεψης.

Τύποι Μοντέλων Εξομάλυνσης

- Τέσσερα (4) πρότυπα τάσης.
 - Σταθερού Επιπέδου
 - Γραμμικής τάσης
 - Εκθετικής τάσης
 - Φθίνουσας τάσης
- Τρία (3) πρότυπα εποχιακότητας.
 - Χωρίς εποχιακότητα
 - Προσθετική εποχιακότητα
 - Πολλαπλασιαστική εποχιακότητα

Τύποι Μοντέλων Εξομάλυνσης

| | Nonseasonal | Additive Seasonality | Multiplicative Seasonality |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Constant Level |  |  |  |
| Linear Trend |  |  |  |
| Exponential Trend |  |  |  |
| Damped Trend |  |  |  |

• Σταθερού Επιπέδου

- ✓ Για πρόβλεψη ενός βήματος.
- ✓ Για χρονοσειρές που περιέχουν υψηλό θόρυβο ή τυχαιότητα.

• Γραμμικής τάσης

- ✓ Για σταθερή αύξηση στο μέλλον.

• Εκθετικής τάσης

- ✓ Για εκθετική αύξηση στο μέλλον (π.χ. στις αρχές του κύκλου ζωής ενός προϊόντος).
- ✓ Είναι υπεραισιόδοξες για μακροπρόθεσμες προβλέψεις.

• Φθίνουσας τάσης

- ✓ Για μεσοπρόθεσμες προβλέψεις.

Τύποι Μοντέλων Εξομάλυνσης

- **Σταθερού Επιπέδου**

- ✓ Για πρόβλεψη ενός βήματος.
- ✓ Για χρονοσειρές που περιέχουν υψηλό θόρυβο ή τυχαιότητα.

- **Γραμμικής τάσης**

- ✓ Για σταθερή αύξηση στο μέλλον.

- **Εκθετικής τάσης**

- ✓ Για εκθετική αύξηση στο μέλλον (π.χ. στις αρχές του κύκλου ζωής ενός προϊόντος).
- ✓ Είναι υπεραισιόδοξες για μακροπρόθεσμες προβλέψεις.

- **Φθίνουσας τάσης**

- ✓ Για μεσοπρόθεσμες προβλέψεις.

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

Παράδειγμα Βιβλίου σελ. 2.18

| Χρόνος t | Δεδομένα X_t | Πρόβλεψη F $\hat{X}_{t-1}(1)$ | Σφάλμα e_t | Επίπεδο στο τέλος της περιόδου t $S_t = S_{t-1} + h_1 e_t$ |
|-------------|-------------------|----------------------------------|-----------------|---------------------------------------------------------------|
| 0 | | | | $S_0 = 585$ |
| 1 | 545 | 585 | -40 | $S_1 = 585 + 0.4(-40) = 569$ |
| 2 | 635 | 569 | 66 | $S_2 = 569 + 0.4(6.6) = 595.4$ |
| 3 | 420 | 595,4 | -175,4 | $S_3 = 595.4 + 0.4(-175.4) = 525.2$ |
| 4 | 716 | 525,2 | 190,8 | $S_4 = 525.2 + 0.4(190.8) = 601.5$ |
| 5 | 699 | 601,5 | 97,5 | $S_5 = 601.5 + 0.4(97,5) = 640.5$ |
| 6 | 681 | 640,5 | 40,5 | $S_6 = 640,5 + 0.4(40.5) = 656.5$ |
| 7 | 763 | 656,5 | 106,3 | $S_7 = 656.5 + 0.4(106.3) = 699.2$ |
| 8 | 778 | 699,2 | 78,8 | $S_8 = 699.2 + 0.4(78.8) = 730.5$ |
| 9 | 690 | 730,5 | -40,5 | $S_9 = 730.5 + 0.4(-40.5) = 711.4$ |
| 10 | 707 | 711,4 | -7,4 | $S_{10} = 711.4 + 0.4(-7.4) = 711.5$ |
| 11 | 716 | 711,5 | 4,5 | $S_{11} = 711.5 + 0.4(4.5) = 713.3$ |
| 12 | | 713,3 | | |

$$e_t = Y_t - F_t$$

$$S_t = S_{t-1} + \alpha \cdot e_t$$

$$F_{t+1} = S_t$$

Μοντέλου Σταθερού Επιπέδου (0)

Εξίσωση Σφάλματος

$$e = Y_{t-1} - F_{t-1}$$

Εξίσωση Επιπέδου & Πρόβλεψης

$$F_t = F_{t-1} + \alpha e$$

$$F_t = F_{t-1} + \alpha(Y_{t-1} - F_{t-1})$$



$$F_t = \alpha Y_{t-1} + (1-\alpha)F_{t-1}$$

Μοντέλου Σταθερού Επιπέδου (I)

Εξίσωση Επιπέδου & Πρόβλεψη

Εξίσωση Σφάλματος

$$e = Y_{t-1} - F_{t-1}$$

$$F_t = \alpha Y_{t-1} + (1-\alpha)F_{t-1}$$

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + (1-\alpha)F_t$$

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha) Y_{t-1} + (1-\alpha)^2 F_{t-1}$$

Ομοίως αντικαθιστώντας στην (3) το F_{t-1} , κοκ , προκύπτει:

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha) Y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 Y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 Y_{t-3} + \alpha(1-\alpha)^4 Y_{t-4} + \dots \\ \dots + \alpha(1-\alpha)^{t-1} Y_1 + (1-\alpha)^t F_1$$

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου (II)

Από την εξίσωση (4) παρατηρούμε

- Ότι οι συντελεστές (βάρη) των των ιστορικών δεδομένων Y μειώνονται εκθετικά για αυτό και το όνομα της μεθόδου «εκθετική εξομάλυνση».
- Ότι ο τελευταίος όρος είναι ο $(1-\alpha)^t F_1$. Αυτό σημαίνει ότι η αρχική πρόβλεψη παίζει ρόλο σε όλες τις επόμενες προβλέψεις. Στο παράδειγμα μας υπολογίζονται τα βάρη για $t = 11$, ισχύει :

$$(1-\alpha)^t = 0.3138 \text{ αν } \alpha=0.1$$

$$(1-\alpha)^t = 0.0004 \text{ αν } \alpha=0.5$$

$$(1-\alpha)^t = 0.0000 \text{ αν } \alpha=0.9$$

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου (III)

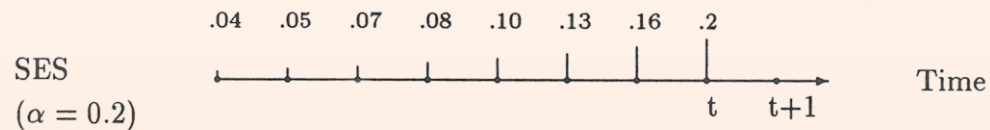
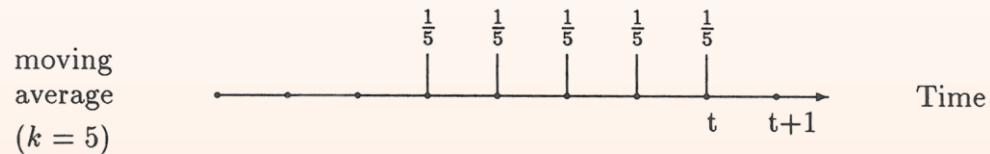
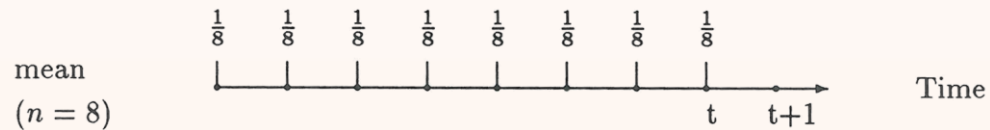
- Όσο μικρότερη τιμή του α επιλέξουμε τόσο μεγαλύτερο ρόλο παίζει η πρώτη τιμή της πρόβλεψης που θα επιλέξουμε F_1 .
- Όσο περισσότερα δεδομένα έχουμε τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του t , οπότε τόσο μικρότερο είναι το βάρος του F_1 .

Π.χ. για $t = 12$ και $\alpha = 0.1$ το βάρος ισούται με 0.2824

για $t = 24$ και $\alpha = 0.1$ το βάρος ισούται με 0.0798

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου (IV)

| Weight assigned to: | $\alpha = 0.2$ | $\alpha = 0.4$ | $\alpha = 0.6$ | $\alpha = 0.8$ |
|---------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Y_t | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 |
| Y_{t-1} | 0.16 | 0.24 | 0.24 | 0.16 |
| Y_{t-2} | 0.128 | 0.144 | 0.096 | 0.032 |
| Y_{t-3} | 0.1024 | 0.0864 | 0.0384 | 0.0064 |
| Y_{t-4} | $(0.2)(0.8)^4$ | $(0.4)(0.6)^4$ | $(0.6)(0.4)^4$ | $(0.8)(0.2)^4$ |



Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου (V)

- Πρέπει να επιλέγεται με προσοχή η πρώτη πρόβλεψη και η παράμετρος εξομάλυνσης.
 - ✓ Η *πρώτη πρόβλεψη* έχει μεγάλη επίδραση στις μελλοντικές προβλέψεις.
 - ✓ Η *παράμετρος εξομάλυνσης* επηρεάζει άμεσα την σταθερότητα των προβλέψεων.

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου (VI)

Εύρεση Αρχικής Πρόβλεψης

- Σαν αρχική πρόβλεψη συνήθως χρησιμοποιούμε:
 - Μέσος όρος των παρατηρήσεων
 - Μέσος όρος των τεσσάρων ή πέντε πρώτων παρατηρήσεων
 - Πρώτη παρατήρηση
 - Σταθερό επίπεδο από μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου (VII)

Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Εξομάλυνσης

- Η βέλτιστη τιμή του α καθορίζεται από την ελαχιστοποίηση του σφάλματος (MSE, MAPE , ή άλλων)
- Το α μπορεί να είναι διαφορετικό όταν στοχεύουμε στην ελαχιστοποίηση του MSE, και άλλο για την ελαχιστοποίηση του MAPE, κλπ
- Το α κυμαίνεται μεταξύ του διαστήματος $[0,1]$.
- Υπολογίζουμε τα σφάλματα για κάθε τιμή του α , για κάθε τιμή του in sample

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου (VIII)

Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Εξομάλυνσης

- Ένας τρόπος για τη βελτιστοποίηση του α είναι ο υπολογισμός του MSE για κάποιο αριθμό τιμών του α (πχ 0.1, 0.2, ..., 0.9) και επιλογή εκείνου που δίνει το μικρότερο σφάλμα MSE.
- Εναλλακτικός τρόπος είναι η χρήση ενός μη γραμμικού αλγορίθμου βελτιστοποίησης.

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (I)

| t | Y |
|----------|----------|
| 0 | |
| 1 | 200 |
| 2 | 135 |
| 3 | 195 |
| 4 | 197,5 |
| 5 | 310 |
| 6 | 175 |
| 7 | 155 |
| 8 | 130 |
| 9 | 220 |
| 10 | 277,5 |
| 11 | 235 |
| 12 | ??? |

- Μηνιαία δεδομένα t
- Αριθμός μηνιαίων φορτώσεων Y_t

Ζητείται η πρόβλεψη Δεκεμβρίου.

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (II)

| t | Y | F | e | S = F + a*e | S = a*Y + (1-a)*F | S |
|----|-------|-------|-------|-----------------------|---------------------------|-------|
| 0 | | | | | | 167,5 |
| 1 | 200 | 167,5 | 32,5 | $167,5 + 0.2 * 32,5$ | $0.2 * 200 + 0.8 * 167,5$ | 174,0 |
| 2 | 135 | 174,0 | -39,0 | $174 + 0.2 * -39$ | $0.2 * 135 + 0.8 * 174$ | 166,2 |
| 3 | 195 | 166,2 | 28,8 | $166,2 + 0.2 * 28,8$ | $0.2 * 195 + 0.8 * 166,2$ | 172,0 |
| 4 | 197,5 | 172,0 | 25,5 | $172 + 0.2 * 25,5$ | $0.2 * 197,5 + 0.8 * 172$ | 177,1 |
| 5 | 310 | 177,1 | 132,9 | $177,1 + 0.2 * 132,9$ | $0.2 * 310 + 0.8 * 177,1$ | 203,7 |
| 6 | 175 | 203,7 | -28,7 | $203,7 + 0.2 * -28,7$ | $0.2 * 175 + 0.8 * 203,7$ | 197,9 |
| 7 | 155 | 197,9 | -42,9 | $197,9 + 0.2 * -42,9$ | $0.2 * 155 + 0.8 * 197,9$ | 189,3 |
| 8 | 130 | 189,3 | -59,3 | $189,3 + 0.2 * -59,3$ | $0.2 * 130 + 0.8 * 189,3$ | 177,5 |
| 9 | 220 | 177,5 | 42,5 | $177,5 + 0.2 * 42,5$ | $0.2 * 220 + 0.8 * 177,5$ | 186,0 |
| 10 | 277,5 | 186,0 | 91,5 | $186 + 0.2 * 91,5$ | $0.2 * 277,5 + 0.8 * 186$ | 204,3 |
| 11 | 235 | 204,3 | 30,7 | $204,3 + 0.2 * 30,7$ | $0.2 * 235 + 0.8 * 204,3$ | 210,4 |
| 12 | ??? | 210,4 | | | | |

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (III)

$\alpha = 0.5$

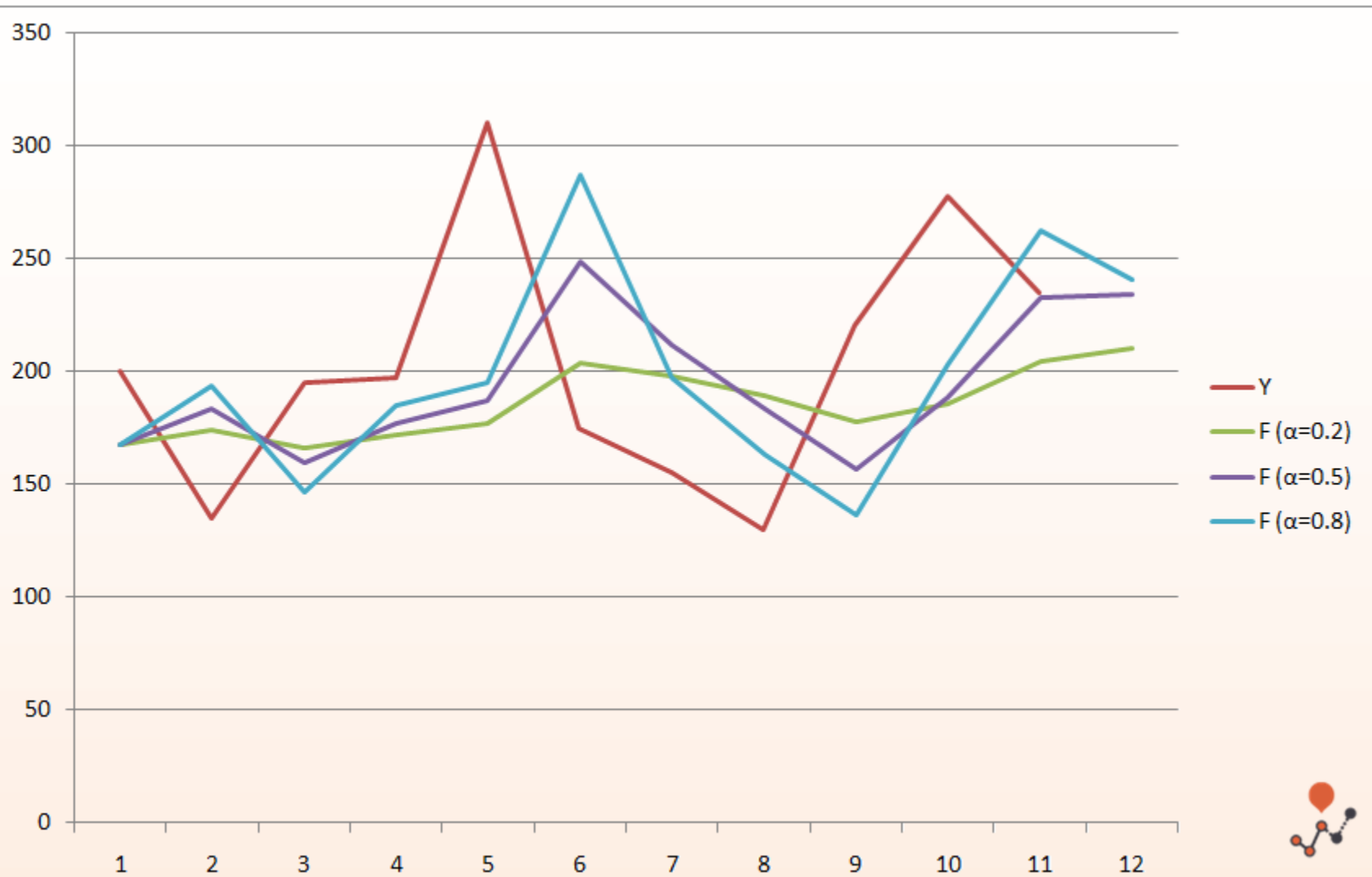
| t | Y | F | e | S |
|----|-------|-------|-------|-------|
| 0 | | | | 167,5 |
| 1 | 200 | 167,5 | 32,5 | 183,8 |
| 2 | 135 | 183,8 | -48,8 | 159,4 |
| 3 | 195 | 159,4 | 35,6 | 177,2 |
| 4 | 197,5 | 177,2 | 20,3 | 187,3 |
| 5 | 310 | 187,3 | 122,7 | 248,7 |
| 6 | 175 | 248,7 | -73,7 | 211,8 |
| 7 | 155 | 211,8 | -56,8 | 183,4 |
| 8 | 130 | 183,4 | -53,4 | 156,7 |
| 9 | 220 | 156,7 | 63,3 | 188,4 |
| 10 | 277,5 | 188,4 | 89,1 | 232,9 |
| 11 | 235 | 232,9 | 2,1 | 234,0 |
| 12 | ??? | 234,0 | | |

$\alpha = 0.8$

| t | Y | F | e | S |
|----|-------|-------|--------|-------|
| 0 | | | | 167,5 |
| 1 | 200 | 167,5 | 32,5 | 193,5 |
| 2 | 135 | 193,5 | -58,5 | 146,7 |
| 3 | 195 | 146,7 | 48,3 | 185,3 |
| 4 | 197,5 | 185,3 | 12,2 | 195,1 |
| 5 | 310 | 195,1 | 114,9 | 287,0 |
| 6 | 175 | 287,0 | -112,0 | 197,4 |
| 7 | 155 | 197,4 | -42,4 | 163,5 |
| 8 | 130 | 163,5 | -33,5 | 136,7 |
| 9 | 220 | 136,7 | 83,3 | 203,3 |
| 10 | 277,5 | 203,3 | 74,2 | 262,7 |
| 11 | 235 | 262,7 | -27,7 | 240,5 |
| 12 | ??? | 240,5 | | |

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (IV)



Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (V)

- Η μεγαλύτερη τιμή του $\alpha = (0.8)$ εξομαλύνει πολύ λίγο το μοντέλο ενώ η μικρότερη $\alpha = (0.2)$ δίνει την καλύτερη εξομάλυνση.
- Αν το $\alpha = 1$, τότε η εκθετική εξομάλυνση γίνεται Naive, ενώ αν $\alpha = 0$ τότε η πρόβλεψή μας είναι σταθερή και ίση με την αρχική πρόβλεψη

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (VI)

| t | Y | F ($\alpha=0.2$) | E | AE | APE | SAPE |
|----|-------|--------------------|--------|--------|-------|-------|
| 1 | 200 | 167,5 | 32,50 | 32,50 | 0,163 | 0,177 |
| 2 | 135 | 174,0 | -39,00 | 39,00 | 0,289 | 0,252 |
| 3 | 195 | 166,2 | 28,80 | 28,80 | 0,148 | 0,159 |
| 4 | 197,5 | 172,0 | 25,54 | 25,54 | 0,129 | 0,138 |
| 5 | 310 | 177,1 | 132,93 | 132,93 | 0,429 | 0,546 |
| 6 | 175 | 203,7 | -28,65 | 28,65 | 0,164 | 0,151 |
| 7 | 155 | 197,9 | -42,92 | 42,92 | 0,277 | 0,243 |
| 8 | 130 | 189,3 | -59,34 | 59,34 | 0,456 | 0,372 |
| 9 | 220 | 177,5 | 42,53 | 42,53 | 0,193 | 0,214 |
| 10 | 277,5 | 186,0 | 91,52 | 91,52 | 0,330 | 0,395 |
| 11 | 235 | 204,3 | 30,72 | 30,72 | 0,131 | 0,140 |
| 12 | | 210,4 | | | | |

| | | | | |
|--------------|--------------|--------------|-------------|-------------|
| $\alpha=0.2$ | 19,51 | 50,41 | 0,25 | 0,25 |
| $\alpha=0.5$ | 12,08 | 54,39 | 0,27 | 0,27 |
| $\alpha=0.8$ | 8,30 | 58,13 | 0,29 | 0,29 |