



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**  
**Μονάδα Προβλέψεων & Στρατηγικής**  
**Forecasting & Strategy Unit**

## *Τεχνικές Προβλέψεων*

Προετοιμασία & Ανάλυση  
Χρονοσειράς

# Απεικόνιση δεδομένων

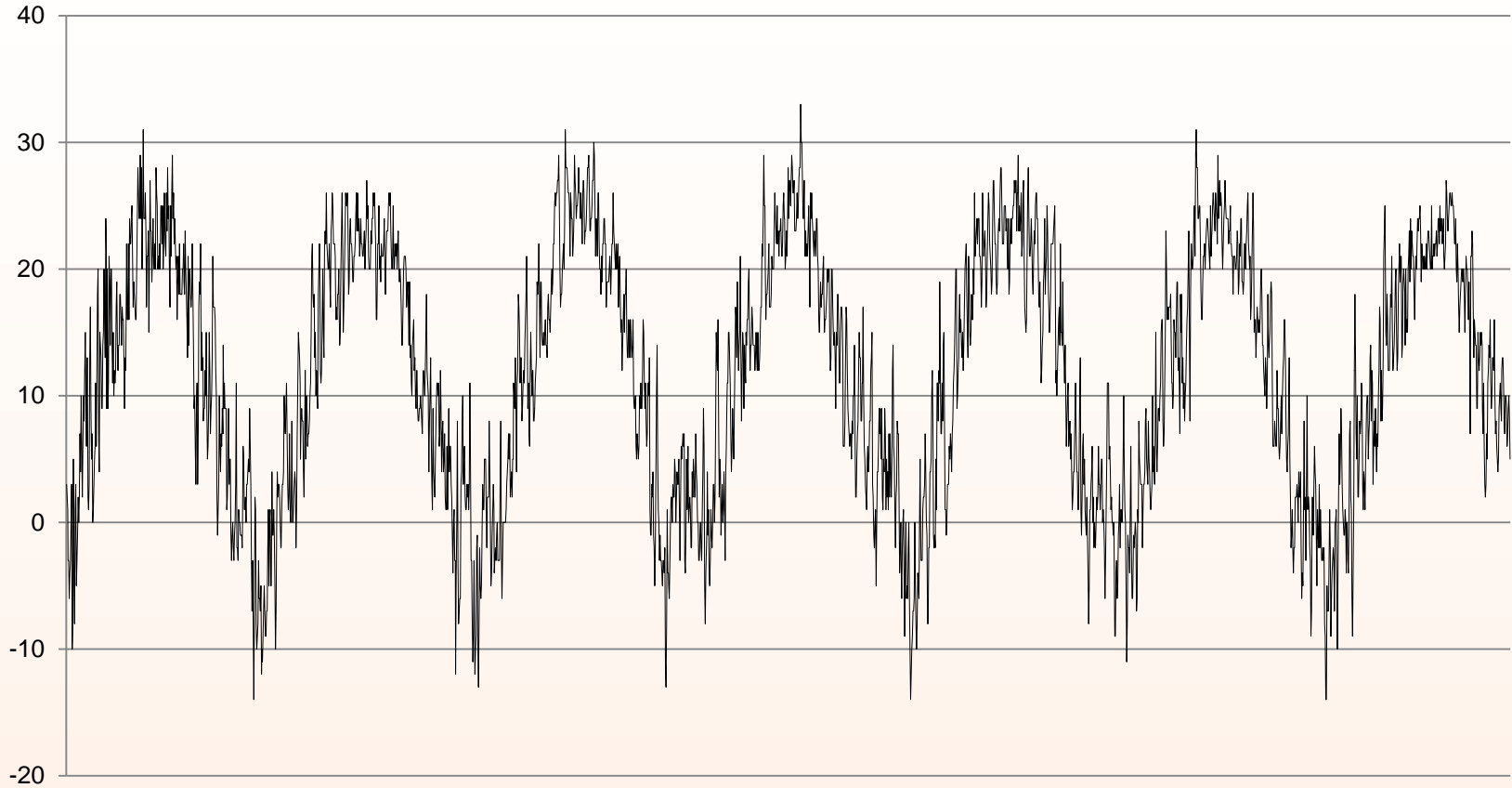
## Γραφική Αναπαράσταση

- Η γραφική αναπαράσταση των δεδομένων αποτελεί ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για την ανάλυση της χρονοσειράς αλλά και τη διαδικασία της πρόβλεψης.
- Η αναπαράσταση ουσιαστικά έγκειται σε δισδιάστατη γραφική απεικόνιση των πραγματικών τιμών των διαθέσιμων δεδομένων ως προς το χρόνο.
- Από την αναπαράσταση των δεδομένων καθίστανται εμφανή τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της χρονοσειράς (τάση, εποχιακότητα, κύκλος, τυχαιότητα, ασυνέχειες) και βοηθούν τον αναλυτή να επιλέξει μεταξύ των εναλλακτικών μεθοδολογιών και εργαλείων, τα πλέον κατάλληλα για την κάθε περίπτωση ώστε να έχει τα βέλτιστα αποτελέσματα και το μικρότερο σφάλμα.
- Επιπλέον, η γραφική απεικόνιση των δεδομένων ενδέχεται να αποκαλύψει ακραίες, εσφαλμένες τιμές. Ο αναλυτής μπορεί, κατόπιν, να προχωρήσει σε κατάλληλες κινήσεις ώστε να διορθώσει τις εσφαλμένες τιμές.

# Απεικόνιση δεδομένων

## Γραφική Αναπαράσταση

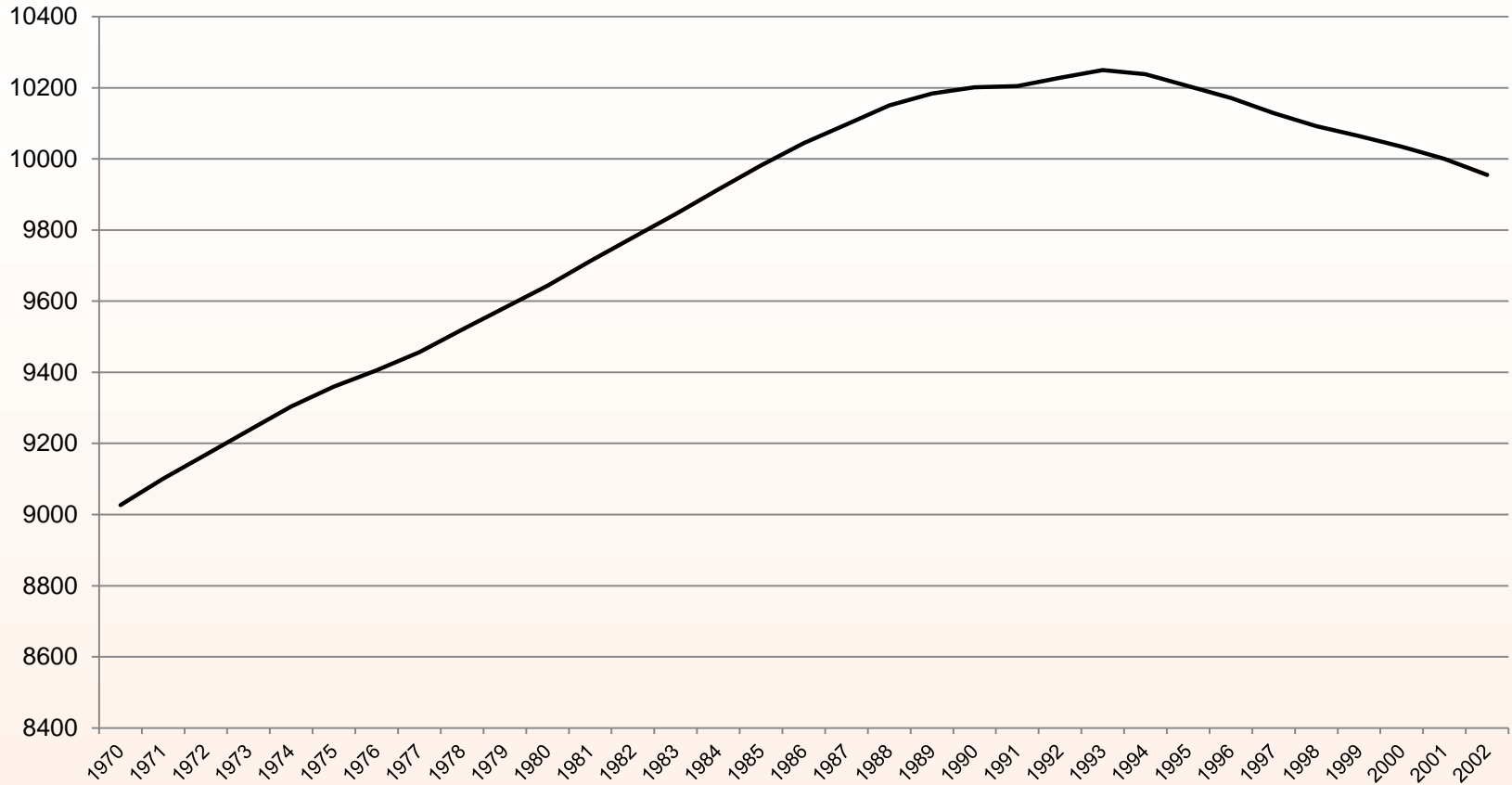
**Aaronsburg (Pennsylvania) - Daily temperature (in celsius degrees)**



# Απεικόνιση δεδομένων

## Γραφική Αναπαράσταση

Belarus - Midyear population (in thousands)



# Απεικόνιση δεδομένων

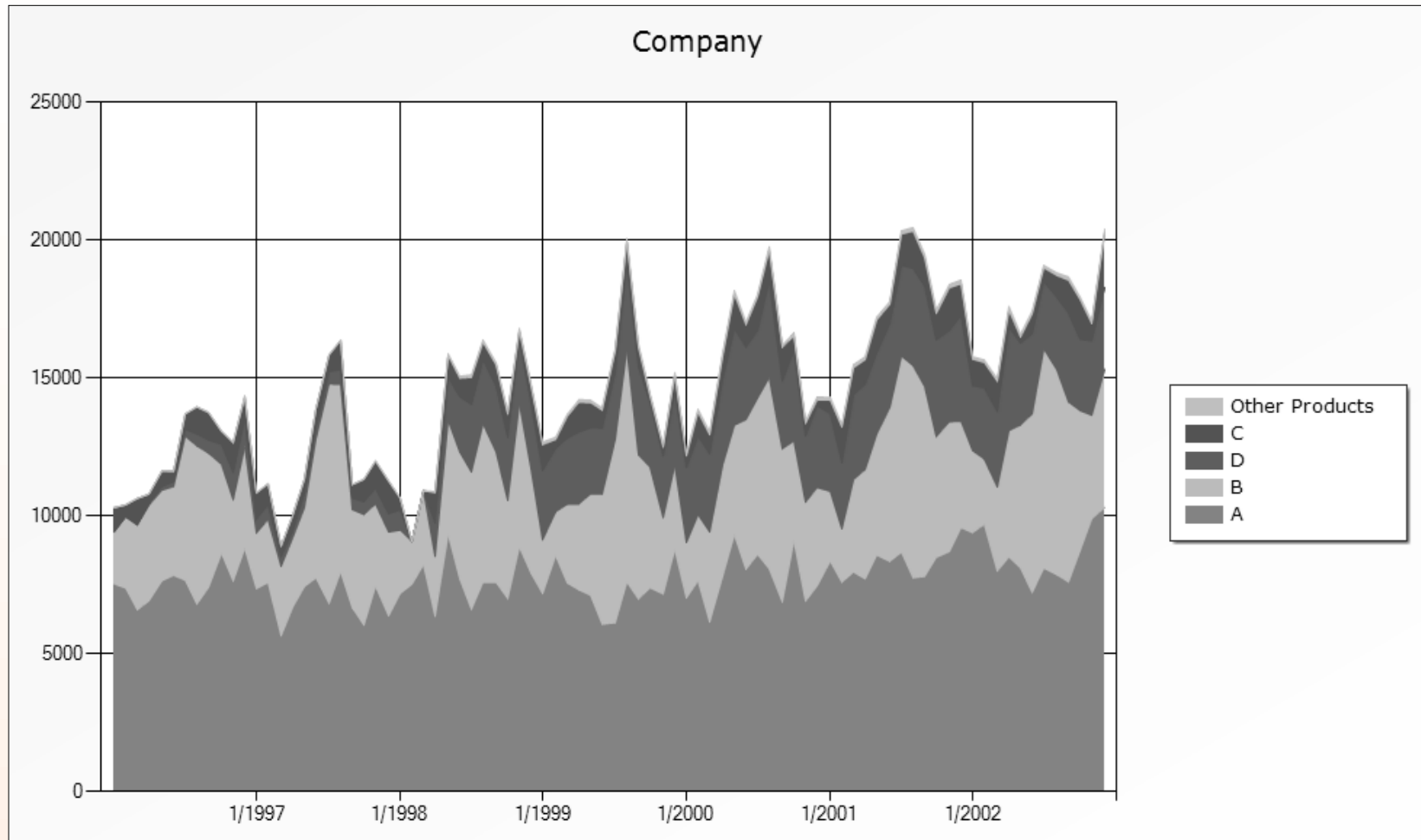
## Γραφική Αναπαράσταση

Gold Price (in \$ per ounce)



# Απεικόνιση δεδομένων

## Γραφική Αναπαράσταση



# Προσαρμογή δεδομένων

- Διαχείριση κενών τιμών - Missing values
- Διαχείριση μηδενικών τιμών - Zero Values
- Ημερολογιακές προσαρμογές - Working & Trading Days

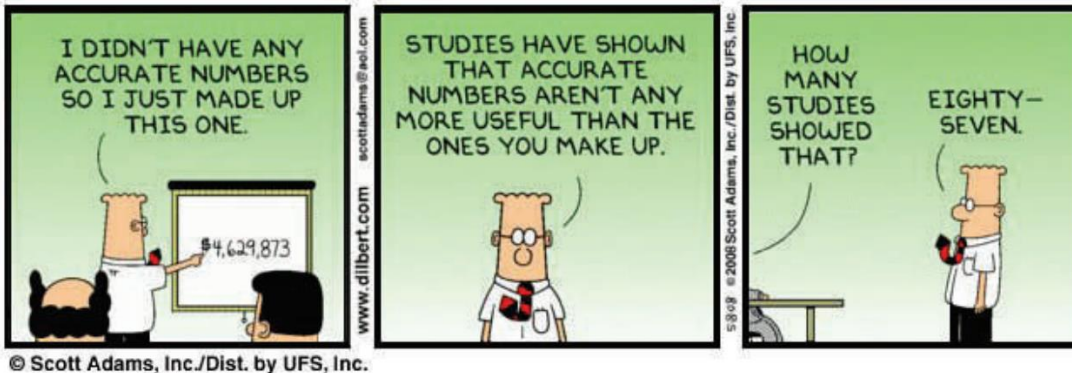
# Διαχείριση κενών τιμών

- Γίνεται προσπάθεια εύρεσης της κενής τιμής από άλλες πηγές ή απευθείας ορισμός αυτής, αν υπάρχει ασφαλής κριτική εκτίμηση για το ύψος στο οποίο κυμάνθηκε.
- Η κενή τιμή ορίζεται ως το ημιάθροισμα (μέσος όρος) της προηγούμενης και της επόμενης παρατήρησης, όταν η χρονοσειρά χαρακτηρίζεται από στασιμότητα και δεν παρατηρείται εποχιακή συμπεριφορά.
- Αν η χρονοσειρά παρουσιάζει σαφή εποχιακή συμπεριφορά, τότε η κενή τιμή ορίζεται ως ο μέσος όρος των τιμών των αντίστοιχων περιόδων. Για παράδειγμα, αν τα δεδομένα αποτελούνται από μηνιαίες παρατηρήσεις και παρατηρηθεί κενή τιμή στο Μάρτιο κάποιου έτους, τότε η κενή αυτή τιμή ορίζεται ως ο μέσος όρος των λοιπών Μαρτίων.



# Διαχείριση μηδενικών τιμών

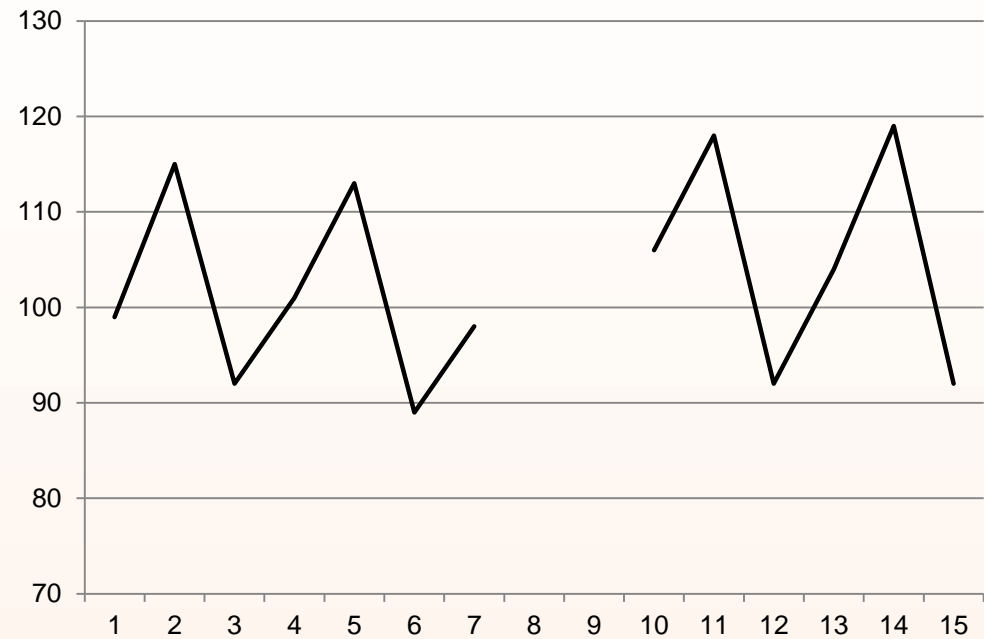
- Καμία αλλαγή στις μηδενικές τιμές συνήθως όταν είναι λίγες
- Διαχείριση μηδενικών τιμών – όπως τις κενές τιμές



# Διαχείρισης κενών τιμών

## Παράδειγμα

t	Τετράμηνο	$Y_t$
1	1ο	99
2	2ο	115
3	3ο	92
4	1ο	101
5	2ο	113
6	3ο	89
7	1ο	98
8	2ο	
9	3ο	
10	1ο	106
11	2ο	118
12	3ο	92
13	1ο	104
14	2ο	119
15	3ο	92



# Διαχείρισης κενών τιμών

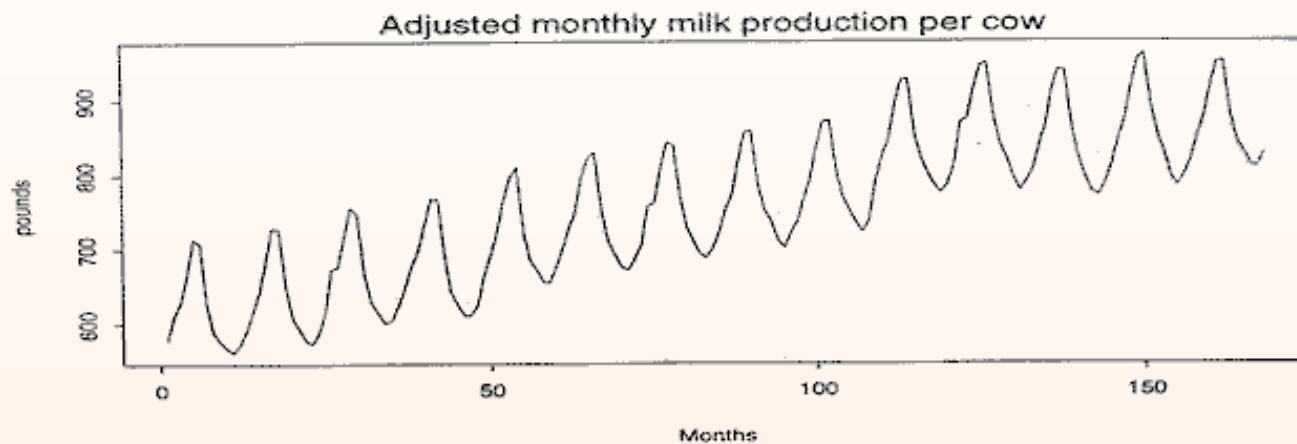
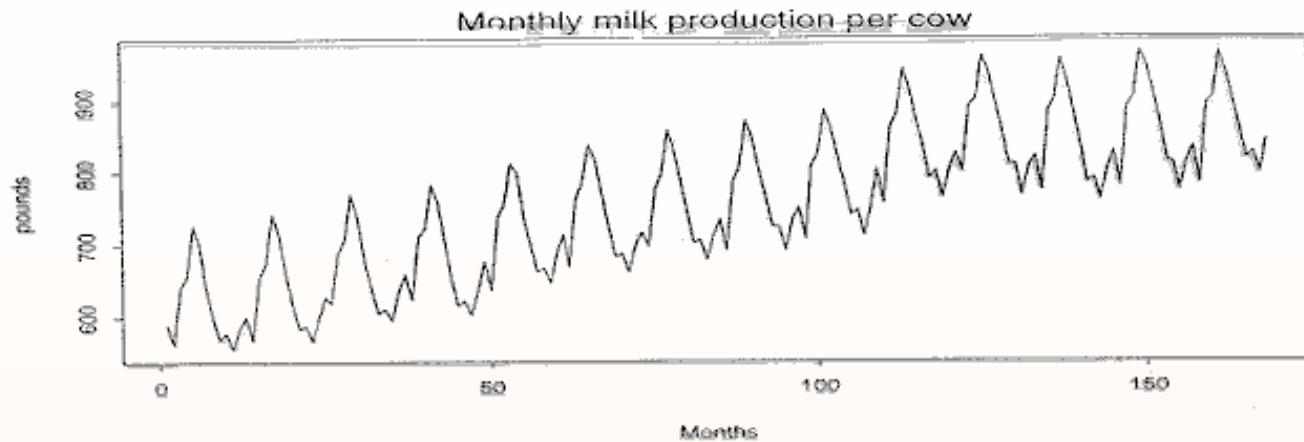
## Παράδειγμα

t	Τετράμηνο	Y <sub>t</sub>
1	1ο	99
2	2ο	115
3	3ο	92
4	1ο	101
5	2ο	113
6	3ο	89
7	1ο	98
8	2ο	<b>116,25</b>
9	3ο	<b>91,25</b>
10	1ο	106
11	2ο	118
12	3ο	92
13	1ο	104
14	2ο	119
15	3ο	92

$$Y_8 = \frac{Y_2 + Y_5 + Y_{11} + Y_{14}}{4} = \frac{115 + 113 + 118 + 119}{4} = 116,25$$

$$Y_9 = \frac{Y_3 + Y_6 + Y_{12} + Y_{15}}{4} = \frac{92 + 89 + 92 + 92}{4} = 91,25$$

# Ημερολογιακές Προσαρμογές



# Ημερολογιακές Προσαρμογές

1. Καθορισμός των εργάσιμων ημερών ή ημερών συναλλαγών (*trading days*) στη διάρκεια μιας εβδομάδας.
2. Καθορισμός της χώρας που εδρεύει η επιχείρηση και εύρεση των επίσημων αργιών (*bank holidays*) αυτής.
3. Υπολογισμός, βάσει των παραπάνω, του πλήθους των εργάσιμων ημερών για κάθε περίοδο που συμπεριλαμβάνεται στο χρονικό διάστημα των διαθέσιμων δεδομένων.
4. Υπολογισμός του μέσου όρου των εργάσιμων ημερών για όλες τις περιόδους που εξετάζονται.
5. Εξομάλυνση της τιμής κάθε διαθέσιμης περιόδου, σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο:

$$Y'_t = Y_t \cdot \frac{\text{number of average trading days in all periods}}{\text{number of trading days in current period (t)}}$$

# Ημερολογιακές Προσαρμογές

## Παράδειγμα

<b>t</b>	<b>Y<sub>t</sub></b>	<b>WD</b>	<b>Y<sub>t</sub>'</b>
1	68	118	<b>69,96</b>
2	125	123	<b>123,37</b>
3	73	122	<b>72,64</b>
4	121	121	<b>121,40</b>
5	80	125	<b>77,70</b>
6	115	117	<b>119,32</b>
7	76	120	<b>76,89</b>
8	123	121	<b>123,41</b>
9	79	123	<b>77,97</b>
10	132	124	<b>129,23</b>
	Μέσος Όρος	<b>121,4</b>	

$$\begin{aligned} \text{Average} &= \frac{WD_1 + WD_2 + \dots + WD_{10}}{10} \\ &= \frac{118 + 123 \dots + 124}{10} \end{aligned}$$

$$Y'_1 = Y_1 \cdot \frac{\text{Average}}{WD_1} = 68 \cdot \frac{121,4}{118} = 69,96$$

# Στατιστική Ανάλυση

## Βασική στατιστική ανάλυση

<b>t</b>	<b>Δεδομένα</b>
1	$Y_1$
2	$Y_2$
3	$Y_3$
...	...
n-2	$Y_{n-2}$
n-1	$Y_{n-1}$
n	$Y_n$

- Μέση τιμή (*Average*)

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n Y_i$$

- Μέγιστη και ελάχιστη τιμή (*Maximum* και *Minimum*)

- Τυπική απόκλιση (*Standard Deviation*)

$$\sigma_{\text{δείγματος}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n - 1}}$$

$$\sigma_{\text{πληθυσμού}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n}}$$

# Στατιστική Ανάλυση

## Βασική στατιστική ανάλυση

- Διακύμανση (*Variance*)
- Συνδιακύμανση (*Covariance*)

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})]$$

- Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης (*Linear Correlation Coefficient*)
  - Αν  $r = \pm 1$ , υπάρχει τέλεια γραμμική συσχέτιση.
  - Αν  $-0,3 < r < 0,3$ , δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση. Αυτό, όμως, δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει άλλου είδους συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών.
  - Αν  $-0,5 < r \leq -0,3$  ή  $0,3 \leq r < 0,5$ , υπάρχει ασθενής γραμμική συσχέτιση.
  - Αν  $-0,7 < r \leq -0,5$  ή  $0,5 \leq r < 0,7$ , υπάρχει μέση γραμμική συσχέτιση.
  - Αν  $-0,8 < r \leq -0,7$  ή  $0,7 \leq r < 0,8$ , υπάρχει ισχυρή γραμμική συσχέτιση.
  - Αν  $-1 < r \leq -0,8$  ή  $0,8 \leq r < 1$ , υπάρχει πολύ ισχυρή γραμμική συσχέτιση.

$$r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$



# Στατιστική Ανάλυση

## Βασική στατιστική ανάλυση

- Συντελεστής αυτοσυσχέτισης (*Autocorrelation Coefficient*).

$$ACF_k = \frac{\sum_{i=1+k}^n [(Y_i - \bar{Y}) \cdot (Y_{i-k} - \bar{Y})]}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

- Συντελεστής μεταβλητότητας (*Coefficient of Variation*).

$$c_v = \frac{\sigma}{\bar{Y}} \cdot 100 \text{ (\%)}$$

- Μέση τιμή διαστήματος μεταξύ ζητήσεων (*Intermittent Demand Interval*).

# Στατιστική Ανάλυση

## Στατιστική ανάλυση ακρίβειας προβλέψεων

<b>t</b>	<b>Δεδομένα</b>	<b>Πρόβλεψη</b>
1	$Y_1$	$F_1$
2	$Y_2$	$F_2$
3	$Y_3$	$F_3$
...	...	...
n-2	$Y_{n-2}$	$F_{n-2}$
n-1	$Y_{n-1}$	$F_{n-1}$
n	$Y_n$	$F_n$
n+1		$F_{n+1}$
...		...
n+h		$F_{n+h}$

Σφάλμα:

$$e_i = Y_i - F_i$$

# Στατιστική Ανάλυση

## Στατιστική ανάλυση ακρίβειας προβλέψεων

- Μέσο σφάλμα (*Mean Error*)

$$ME = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - F_i)$$

- Μέσο απόλυτο σφάλμα (*Mean Absolute Error*)

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Y_i - F_i|$$

- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα (*Mean Squared Error*)

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - F_i)^2$$

- Ρίζα μέσου τετραγωνικού σφάλματος (*Root Mean Squared Error*)

$$RMSE = \sqrt{MSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - F_i)^2}$$

# Στατιστική Ανάλυση

## Στατιστική ανάλυση ακρίβειας προβλέψεων

- Μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα (*Mean Absolute Percentage Error*)

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{Y_i - F_i}{Y_i} \right| \cdot 100 (\%)$$

- Συμμετρικό μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα (*Symmetric Mean Absolute Percentage Error*).

$$\text{sMAPE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{Y_i - F_i}{\left(\frac{Y_i + F_i}{2}\right)} \right| \cdot 100 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{2 \cdot (Y_i - F_i)}{Y_i + F_i} \right| \cdot 100 (\%)$$

Αισιόδοξη πρόβλεψη:  $Y_t=100$  και  $F_t=110 \rightarrow \text{sMAPE}=4,76\%$

Απαισιόδοξη πρόβλεψη:  $Y_t=100$  και  $F_t=90 \rightarrow \text{sMAPE}=5,26\%$

# Στατιστική Ανάλυση

## Στατιστική ανάλυση ακρίβειας προβλέψεων

### Relative Measures

Δεδομένα	Πρόβλεψη 1 <i>Benchmark</i>	Πρόβλεψη 2	Πρόβλεψη 3
$Y_1$	$F_1^1$	$F_1^2$	$F_1^3$
$Y_2$	$F_2^1$	$F_2^2$	$F_2^3$
$Y_3$	$F_3^1$	$F_3^2$	$F_3^3$
...	...	...	...
$Y_{n-2}$	$F_{n-2}^1$	$F_{n-2}^2$	$F_{n-2}^3$
$Y_{n-1}$	$F_{n-1}^1$	$F_{n-1}^2$	$F_{n-1}^3$
$Y_n$	$F_n^1$	$F_n^2$	$F_n^3$
	$F_{n+1}^1$	$F_{n+1}^2$	$F_{n+1}^3$
	...	...	...
	$F_{n+h}^1$	$F_{n+h}^2$	$F_{n+h}^3$

$$\text{RelMAE} = \frac{\text{MAE}_i}{\text{MAE}_{\text{benchmark}}}$$

# Στατιστική Ανάλυση

## Στατιστική ανάλυση ακρίβειας προβλέψεων

- Μέσο απόλυτο κανονικοποιημένο σφάλμα (Mean Absolute Scaled Error)

$$MAsE = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Y_i - F_i|}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n |Y_i - Y_{i-1}|}$$

- Theil's U-Statistic

$$U = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^n \left(\frac{Y_i - F_i}{Y_{i-1}}\right)^2}{\sum_{i=2}^n \left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}}\right)^2}}$$

- Αν  $U=1$ , τότε η μέθοδος Naive είναι εξίσου ακριβής με την μέθοδο πρόβλεψης που εφαρμόσθηκε.
  - Αν  $U < 1$ , τότε η μέθοδος πρόβλεψης που εφαρμόσθηκε έχει καλύτερη απόδοση από πλευράς ακρίβειας σε σχέση με τη μέθοδο Naive (όσο μικρότερη τιμή, τόσο καλύτερη απόδοση).
  - Αν  $U > 1$ , τότε η μέθοδος πρόβλεψης που εφαρμόσθηκε έχει χειρότερη απόδοση από πλευράς ακρίβειας σε σχέση με τη μέθοδο Naive, οπότε δεν υπάρχει λόγος να εφαρμοσθεί (όσο μεγαλύτερη τιμή, τόσο χειρότερη απόδοση).
- Percentage Better

$$\text{Percentage Better} = \text{mean}(I\{\text{MAPE}_i < \text{MAPE}_b\}) \cdot 100 \text{ (\%)}$$

# Στατιστική Ανάλυση

Στατιστική ανάλυση ακρίβειας προβλέψεων

Παράδειγμα

<b>t</b>	<b>Y<sub>t</sub></b>	<b>F<sub>t</sub></b>	<b>e<sub>t</sub></b>
1	33	31	2
2	49	42	7
3	52	50	2
4	57	61	-4
5	78	73	5
6	83	85	-2
7	90	94	-4
8	112	103	9
9	118	115	3
10	116	124	-8
11		132	
12		141	

$$e_1 = Y_1 - F_1^1 = 33 - 31 = 2$$

$$ME = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^1 = \frac{2 + 7 + \dots - 8}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |e_i^1| = \frac{|2| + |7| + \dots + |-8|}{10} = \frac{46}{10} = 4,6$$

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_i^1)^2 = \frac{2^2 + 7^2 + \dots + (-8)^2}{10} = \frac{272}{10} = 27,2$$

$$\Rightarrow RMSE = \sqrt{MSE} = 5,22$$

# Στατιστική Ανάλυση

## Στατιστική ανάλυση ακρίβειας προβλέψεων

Παράδειγμα

t	Y <sub>t</sub>	F <sub>t</sub>	e <sub>t</sub>
1	33	31	2
2	49	42	7
3	52	50	2
4	57	61	-4
5	78	73	5
6	83	85	-2
7	90	94	-4
8	112	103	9
9	118	115	3
10	116	124	-8
11		132	
12		141	

$$\begin{aligned} \text{MAPE} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|e_i^1|}{Y_i} \cdot 100 (\%) \\ &= \frac{|2|}{33} + \frac{|7|}{49} + \dots + \frac{|-8|}{116} \cdot 100 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\text{MAPE} = \frac{0,619}{10} \cdot 100 = 6,19\%$$

$$\begin{aligned} \text{sMAPE} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot |e_i^2|}{Y_i + F_i} \cdot 100 (\%) \\ &= 2 \cdot \frac{|2|}{33 + 31} + \frac{|7|}{49 + 42} + \dots + \frac{|-8|}{116 + 124} \cdot 100 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{sMAPE} = 2 \cdot \frac{0,317}{10} \cdot 100 = 6,33\%$$



# Στατιστική Ανάλυση

Στατιστική ανάλυση ακρίβειας προβλέψεων

Παράδειγμα

<b>t</b>	<b>Y<sub>t</sub></b>	<b>F<sub>t</sub></b>	<b>e<sub>t</sub></b>
1	33	31	2
2	49	42	7
3	52	50	2
4	57	61	-4
5	78	73	5
6	83	85	-2
7	90	94	-4
8	112	103	9
9	118	115	3
10	116	124	-8
11		132	
12		141	

$$\begin{aligned} \text{MASe} &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |e_i^1|}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n |Y_i - Y_{i-1}|} \\ &= \frac{|2| + |7| + \dots + |-8|}{\frac{10}{|49 - 33| + |52 - 49| + \dots + |116 - 118|}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{MASe} = \frac{46}{\frac{10}{87}} = 0,476$$

# Στατιστική Ανάλυση

## Στατιστική ανάλυση ακρίβειας προβλέψεων

Παράδειγμα

t	Y <sub>t</sub>	F <sub>t</sub> <sup>1</sup>	F <sub>t</sub> <sup>2</sup>	e <sub>t</sub> <sup>1</sup>	e <sub>t</sub> <sup>2</sup>
1	33	31	32	2	1
2	49	42	43	7	6
3	52	50	51	2	1
4	57	61	58	-4	-1
5	78	73	75	5	3
6	83	85	87	-2	-4
7	90	94	95	-4	-5
8	112	103	105	9	7
9	118	115	114	3	4
10	116	124	126	-8	-10
11		132	134		
12		141	143		

$$MAE_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |e_i^1| = \frac{|2| + |7| + \dots + |-8|}{10} = \frac{46}{10} = 4,6$$

$$MAE_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |e_i^2| = \frac{|1| + |6| + \dots + |-10|}{10} = \frac{42}{10} = 4,2$$

$$RelMAE_2 = \frac{MAE_2}{MAE_{benchmark}} = \frac{4,2}{4,6} = 0,913$$

# Ρυθμός ανάπτυξης

Ο δείκτης του ρυθμού ανάπτυξης (*growth rate*) αποτελεί ένα μέτρο της αυξητικής ή φθίνουσας πορείας μιας σειράς δεδομένων για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Εκφράζεται σε ποσοστιαία μορφή και συνήθως αναφέρεται στη σύγκριση του ύψους των δεδομένων του τελευταίου έτους σε σχέση με τα υπόλοιπα διαθέσιμα δεδομένα. Η μαθηματική έκφραση του ρυθμού ανάπτυξης έχει ως εξής:

$$\text{Growth Rate} = \frac{\frac{1}{ppy} \cdot \sum_{i=n-ppy+1}^n Y_i - \frac{1}{n-ppy} \cdot \sum_{i=1}^{n-ppy} Y_i}{\frac{1}{n-ppy} \cdot \sum_{i=1}^{n-ppy} Y_i} \cdot 100 (\%)$$

Όπου  $Y$  το διάνυσμα των  $n$  παρατηρήσεων και  $ppy$  το πλήθος των περιόδων στο μήκος ενός έτους (για παράδειγμα,  $ppy=12$  αν τα δεδομένα αφορούν μηνιαίες παρατηρήσεις).

# Ρυθμός ανάπτυξης

## Παράδειγμα

t	Y <sub>t</sub>
1	23
2	27
3	26
4	34
5	37
6	36
7	41
8	45
9	49
10	51
11	56
12	62

$$\text{Growth Rate} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \sum_{i=9}^{12} Y_i - \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^8 Y_i}{\frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^8 Y_i} \cdot 100 (\%)$$

$$\text{Growth Rate} = \frac{\frac{49 + 51 + 56 + 62}{4} - \frac{23 + 27 + \dots + 45}{8}}{\frac{23 + 27 + 26 + 34 + 37 + 36 + 41 + 45}{8}} \cdot 100 (\%)$$

$$\Rightarrow \text{Growth Rate} = \frac{\frac{218}{4} - \frac{269}{8}}{\frac{269}{8}} \cdot 100 (\%) = \frac{54,5 - 33,625}{33,625} \cdot 100 (\%)$$

$$\Rightarrow \text{Growth Rate} = 62,08 \%$$

