ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Μονάδα Προβλέψεων & Στρατηγικής
Forecasting & Strategy Unit



Αποσύνθεση και Μέθοδοι Προβλέψεων Διάλεξη 2

Αποσύνθεση (Decomposition)

Μαθηματική διαδικασία η οποία αποσκοπεί στην απομόνωση των συνιστωσών μίας χρονοσειράς.



Τάση
Trend component

Εποχιακότητα
Seasonal Component

Τυχαιότητα
Irregular or Random component

Κύκλος
Cyclical component

Μαθηματική Διατύπωση:

$$Y_t = f(S_t, T_t, C_t, R_t)$$

FSU

Αποσύνθεση (Decomposition)



Τάση
Trend component

Εποχιακότητα
Seasonal Component

Τυχαιότητα
Irregular or Random component

Κύκλος
Cyclical component

Μαθηματική Διατύπωση:

$$Y_t = f(S_t, T_t, C_t, R_t)$$

- Y_t : παρατήρηση κατά τη χρονική περίοδο t
- S_t : συνιστώσα εποχιακότητας
- T_t : συνιστώσα τάσης
- C_t : συνιστώσα κύκλου
- R_t : συνιστώσα τυχαιότητας

FSU

Αποσύνθεση (Decomposition)

Δύο μορφές του μοντέλου

- Προσθετικό (Additive)

$$Y_t = S_t + T_t + R_t + C_t$$

- Πολλαπλασιαστικό (Multiplicative)

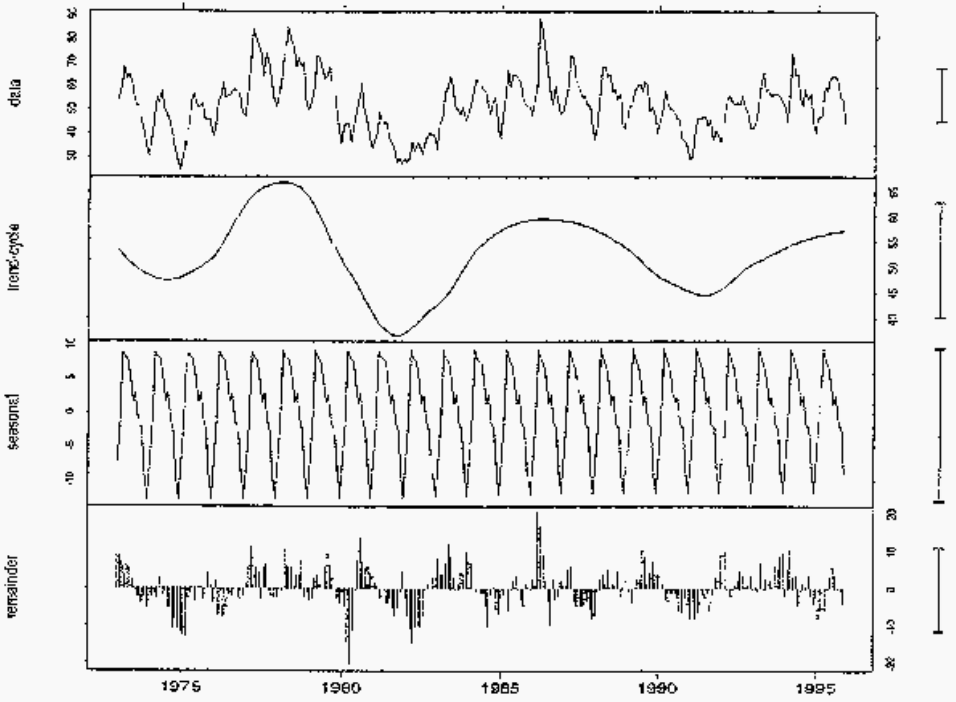
$$Y_t = S_t \times T_t \times R_t \times C_t$$

- Y_t : παρατήρηση κατά τη χρονική περίοδο t
- S_t : συνιστώσα εποχιακότητας
- T_t : συνιστώσα τάσης – κύκλου
- R_t : συνιστώσα τυχαιότητας

FSU

Γράφημα της Αποσύνθεσης

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές



Αποεποχικοποίηση

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές

Είναι μέρος της διαδικασίας αποσύνθεσης.

Αποσκοπεί στην απομόνωση της συνιστώσας εποχιακότητας (περιοδική συμπεριφορά στη διάρκεια ενός έτους) της χρονοσειράς.

Αποσκοπεί στην δημιουργία της αποεποχικοποιημένης χρονοσειράς.

FSU

Αποεποχικοποίηση

Είναι ιδιαίτερα σημαντική διαδικασία.

Οι μέθοδοι προβλέψεων πρέπει να εφαρμόζονται σε μη εποχιακές χρονοσειρές, οι οποίες στην συνέχεια επαναεποχικοποιούνται (εποχικοποίηση).

Η πρακτική αυτή αυξάνει την αξιοπιστία των προβλέψεων.

FSU

Αίτια Εποχιακής Συμπεριφοράς

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές

Ημερολογιακές επιδράσεις (Calendar effects)

Οι μέρες των εθνικών εορτών κ.λ.π. επιδρούν δυναμικά στα οικονομικά μεγέθη, δημιουργώντας ένα εποχιακό πρότυπο, ιδιαίτερα έντονο στην βιομηχανική παραγωγή και στην κατανάλωση αγαθών.

Σημαντικές αποφάσεις (Institutional influences)

Όλα τα είδη αποφάσεων από ιδρύματα και ιδιώτες επιδρούν με τον ανάλογο βαθμό στην εξέλιξη οικονομικών μεγεθών. Κλασσικό παράδειγμα οι ακριβείς ημερομηνίες που θα διατεθούν, από διάφορους οργανισμούς, τα μερίσματα των μετοχών ή τα ομόλογα.

Προσδοκίες (Expectations)

Οι προσδοκίες στον οικονομικό χώρο, απόρροια της μακράς πείρας, επιδρούν άμεσα στις αποφάσεις των παραγωγών και καταναλωτών με αποτέλεσμα να δημιουργούν εποχιακές διακυμάνσεις. Παράδειγμα η αύξηση της παραγωγής παιχνιδιών πριν τις εορτές αλλά και η αναμονή των καταναλωτών μέχρι να πέσει η τιμή του πετρελαίου θέρμανσης.

Κλίμα- Καιρός (Weather influences)

Οι κλιματολογικές μεταβολές επιδρούν στις οικονομικές μεταβλητές και είναι ιδιαίτερα έντονες στον χώρο της αγροτικής παραγωγής, των κατασκευαστικών εταιρειών, των μεταφορών κ.λ.π.

FSU

Κινητοί Μέσοι Όροι

Οι κινητοί μέσοι όροι χρησιμοποιούνται ως:

- Μέθοδο αποεποχικοποίησης – εξομάλυνσης των δεδομένων. Εκτιμούμε την καμπύλη τάσης – κύκλου χρησιμοποιώντας τον μέσο όρο των κοντινών σημείων.

- Μέθοδο πρόβλεψης των δεδομένων. Εκτιμούμε την τιμή της επόμενης παρατήρησης χρησιμοποιώντας τον μέσο όρο των πιο πρόσφατων παρατηρήσεων.

FSU

Κινητοί Μέσοι όροι

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές



- Simple Moving Average
- Weighted moving Average
- Double Moving Average
- Centered Moving Average

FSU

Simple Moving Average

- Υπολογισμός του μέσου όρου των τιμών γύρω από μία παρατήρηση.
- Εξαλείφει μέρος της τυχαιότητας των δεδομένων
- Δίνει μία λογική εκτίμηση της συνιστώσας τάσης-κύκλου της παρατήρησης.

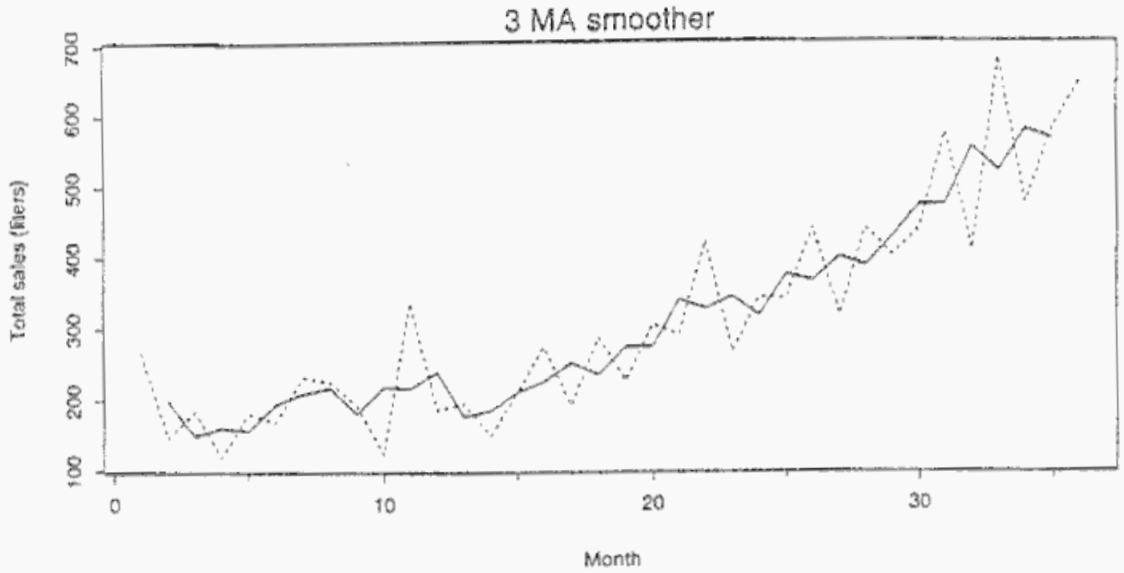
$$TC_t = KMO(n)_t = \frac{1}{n} \sum_{i=-(n \bmod 2)}^{(n \bmod 2)} Y_{t+i} \Rightarrow$$

$$TC_t = \frac{1}{n}\left(Y_{t-(n \bmod 2)} + \cdots + Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1} + \cdots + Y_{t+(n \bmod 2)}\right)$$

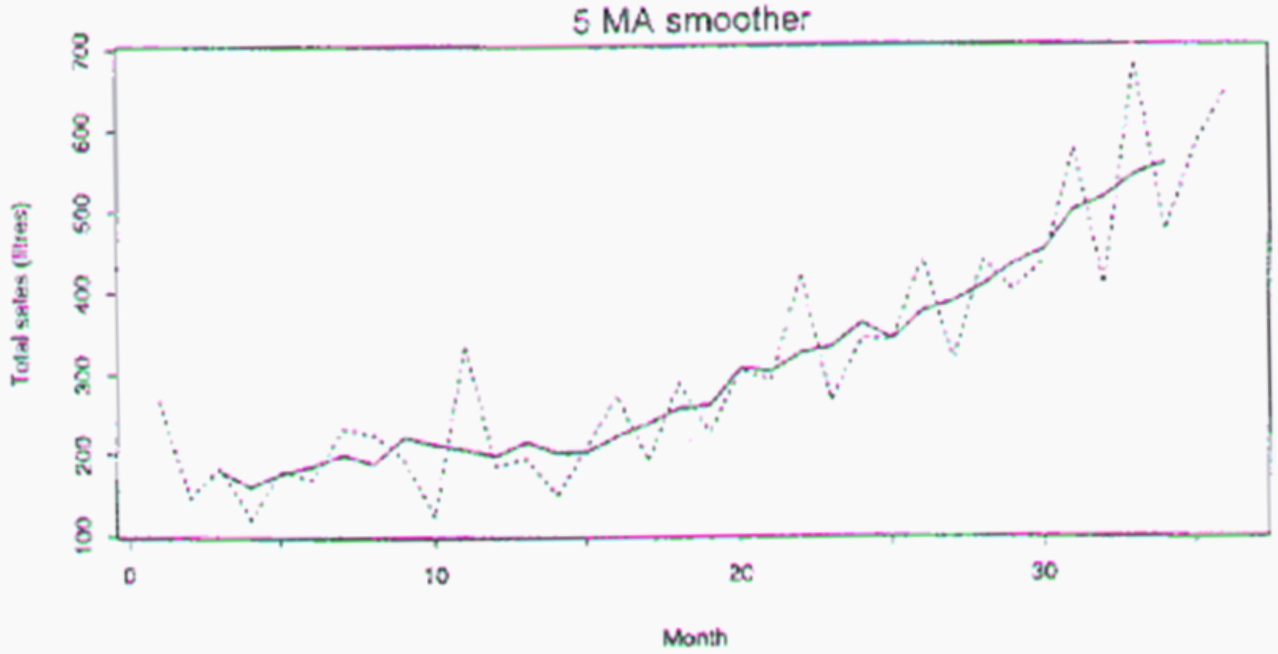
$$TC_t = KMO(5)_t = \frac{1}{5}\left(Y_{t-2} + Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1} + Y_{t+2}\right)$$

FSU

Simple Moving Average



Simple Moving Average



Simple Moving Average

t	Y_t	ΚΜΟ(5)
1	21	
2	33	
3	56	35,60
4	45	37,40
5	23	43,00
6	30	39,40
7	61	33,80
8	38	36,40
9	17	41,00
10	36	38,40
11	53	35,80
12	48	38,00
13	25	42,40
14	28	40,20
15	58	
16	42	

$$\text{KMO}(5)_3 = \frac{1}{5}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5) \Rightarrow$$

$$\text{KMO}(5)_3 = \frac{1}{5}(21 + 33 + 56 + 45 + 23) = 35{,}6$$

Weighted Moving Average

- Αποτελεί παραλλαγή του Simple Moving Average.
- Οι όροι που μετέχουν στον μέσο όρο, έχουν διαφορετικά βάρη.
- Δίνεται μεγαλύτερο βάρος στις παρατηρήσεις που γειτνιάζουν σε μεγάλο βαθμό με την τρέχουσα παρατήρηση και μικρότερο βάρος στις πιο μακρινές παρατηρήσεις.
- Επιλέγονται, ώστε να είναι συμμετρικά ως προς την τρέχουσα παρατήρηση.
- Η καμπύλη που προκύπτει είναι περισσότερο ομαλή.

$$TC_t = \Sigma\text{ΚΜΟ}(n)_t = \sum_{i=-(n \bmod 2)}^{(n \bmod 2)} a_i \cdot Y_{t+i}$$

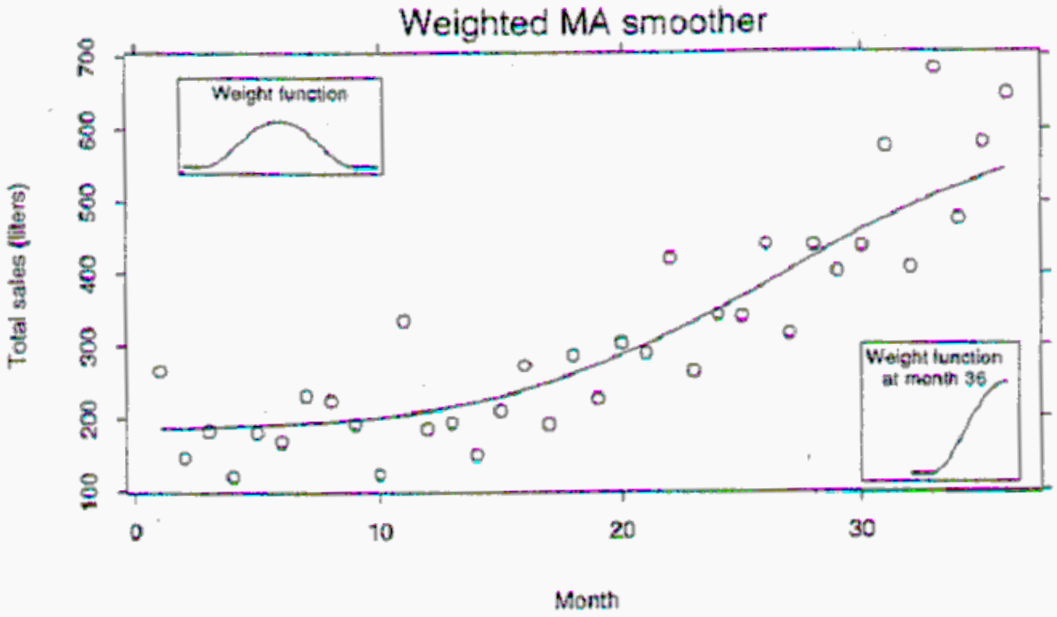
$$\sum_{i=-(n \bmod 2)}^{(n \bmod 2)} a_i = 1$$

$$TC_t = \Sigma\text{ΚΜΟ}(5)_t \Rightarrow$$

$$TC_t = 0{,}1 \cdot Y_{t-2} + 0{,}2 \cdot Y_{t-1} + 0{,}4 \cdot Y_t + 0{,}2 \cdot Y_{t+1} + 0{,}1 \cdot Y_{t+2}$$

FSU

Weighted Moving Average



Weighted Moving Average

t	Y_t	ΣΚΜΟ(5)
1	21	
2	33	
3	56	42,40
4	45	40,10
5	23	35,90
6	30	37,10
7	61	42,00
8	38	37,40
9	17	33,00
10	36	37,00
11	53	42,20
12	48	41,20
13	25	36,30
14	28	36,80
15	58	
16	42	

$$\Sigma\text{ΚΜΟ}(5)_3 = 0{,}1 \cdot Y_1 + 0{,}2 \cdot Y_2 + 0{,}4 \cdot Y_3 + 0{,}2 \cdot Y_4 + 0{,}1 \cdot Y_5 \Rightarrow$$

$$\Sigma\text{ΚΜΟ}(5)_3 = 0{,}1 \cdot 21 + 0{,}2 \cdot 33 + 0{,}4 \cdot 56 + 0{,}2 \cdot 45 + 0{,}1 \cdot 23 = 42{,}4$$

FSU

Double Moving Averages

- Αποτελεί αποτέλεσμα της ομαλοποίησης ενός απλού μέσου όρου, με την χρήση ενός δεύτερου απλού μέσου όρου.

- Π.χ. Ο 5x3 ΜΑ υπολογίζεται από τον 3ΜΑ ενός 5ΜΑ.

$$\left.\begin{aligned}
\text{ΚΜΟ}(3)_{t-2} &= \frac{Y_{t-3} + Y_{t-2} + Y_{t-1}}{3} \\
\text{ΚΜΟ}(3)_{t-1} &= \frac{Y_{t-2} + Y_{t-1} + Y_t}{3} \\
\text{ΚΜΟ}(3)_{t} &= \frac{Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1}}{3} \\
\text{ΚΜΟ}(3)_{t+1} &= \frac{Y_t + Y_{t+1} + Y_{t+2}}{3} \\
\text{ΚΜΟ}(3)_{t+2} &= \frac{Y_{t+1} + Y_{t+2} + Y_{t+3}}{3}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Delta\text{ΚΜΟ}(5\times 3)_t =$$

$$= \frac{\text{ΚΜΟ}(3)_{t-2} + \text{ΚΜΟ}(3)_{t-1} + \text{ΚΜΟ}(3)_t + \text{ΚΜΟ}(3)_{t+1} + \text{ΚΜΟ}(3)_{t+2}}{5} =$$

$$= \frac{Y_{t-3} + 2\cdot Y_{t-2} + 3\cdot Y_{t-1} + 3\cdot Y_t + 3\cdot Y_{t+1} + 2\cdot Y_{t+2} + Y_{t+3}}{15} =$$

$$= \frac{1}{15}\cdot Y_{t-3} + \frac{2}{15}\cdot Y_{t-2} + \frac{1}{5}\cdot Y_{t-1} + \frac{1}{5}\cdot Y_t + \frac{1}{5}\cdot Y_{t+1} + \frac{2}{15}\cdot Y_{t+2} + \frac{1}{15}\cdot Y_{t+3}$$

FSU

Double Moving Average

t	Y_t	ΚΜΟ(3)	ΔΚΜΟ(3×3)
1	21		
2	33	36,67	
3	56	44,67	40,89
4	45	41,33	39,56
5	23	32,67	37,33
6	30	38,00	37,89
7	61	43,00	39,89
8	38	38,67	37,33
9	17	30,33	34,78
10	36	35,33	37,11
11	53	45,67	41,00
12	48	42,00	40,44
13	25	33,67	37,56
14	28	37,00	37,78
15	58	42,67	
16	42		

$$\Delta KMO(3\times 3)_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3}+\frac{Y_2+Y_3+Y_4}{3}+\frac{Y_3+Y_4+Y_5}{3}\right)\Rightarrow$$

$$\Delta KMO(3\times 3)_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{21+33+56}{3}+\frac{33+56+45}{3}+\frac{56+45+23}{3}\right)\Rightarrow$$

$$\Delta KMO(3\times 3)_3 = \frac{1}{3}(36{,}67+44{,}67+41{,}33) = 40{,}89$$

Centered Moving Average

$$\frac{1}{4}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) = T_{2,5} \qquad \frac{1}{4}(Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5) = T_{3,5}$$

$$T_3 = \frac{1}{2}(T_{2,5} + T_{3,5}) \Rightarrow$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + \frac{1}{4}(Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5)\right] \Rightarrow$$

$$T_3 = \frac{1}{8}(Y_1 + 2 \cdot Y_2 + 2 \cdot Y_3 + 2 \cdot Y_4 + Y_5) \Rightarrow$$

$$T_3 = \frac{1}{8} \cdot Y_1 + \frac{1}{4} \cdot Y_2 + \frac{1}{4} \cdot Y_3 + \frac{1}{4} \cdot Y_4 + \frac{1}{8} \cdot Y_5$$

FSU

Centered Moving Average

t	Y_t	ΚΚΜΟ(4)
1	21	
2	33	
3	56	39,00
4	45	38,88
5	23	39,13
6	30	38,88
7	61	37,25
8	38	37,25
9	17	37,00
10	36	37,25
11	53	39,50
12	48	39,50
13	25	39,13
14	28	39,00
15	58	
16	42	

$$\text{KKMO}(4)_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}{4} + \frac{Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\text{KKMO}(4)_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{21 + 33 + 56 + 45}{4} + \frac{33 + 56 + 45 + 23}{4}\right) \Rightarrow$$

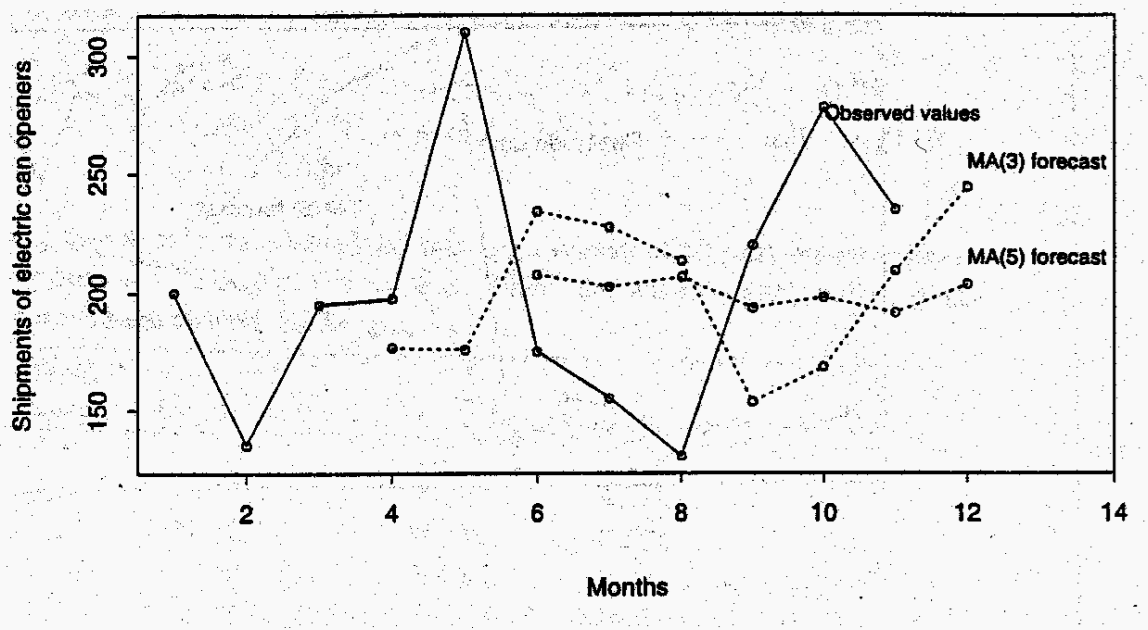
$$\text{KKMO}(4)_3 = \frac{1}{2}(38{,}75 + 39{,}25) = 39$$

FSU

Κινητοί Μέσοι Όροι ως Μέθοδος Πρόβλεψης

(1) Month	(2) Time period	(3) Observed values (shipments)	(4) Three-month moving average	(5) Five-month moving average
Jan	1	200.0	—	—
Feb	2	135.0	—	—
Mar	3	195.0	—	—
Apr	4	197.5	176.7	—
May	5	310.0	175.8	—
Jun	6	175.0	234.2	207.5
Jul	7	155.0	227.5	202.5
Aug	8	130.0	213.3	206.5
Sep	9	220.0	153.3	193.5
Oct	10	277.5	168.3	198.0
Nov	11	235.0	209.2	191.4
Dec	12	—	244.2	203.5
Analysis of errors				
Test periods:			4–11	6–11
Mean Error			17.71	−1.17
Mean Absolute Error			71.46	51.00
Mean Absolute Percentage Error (MAPE)			34.89	27.88
Mean Square Error (MAE)			6395.66	3013.25
Theil's *U*-statistic			1.15	0.81

Κινητοί Μέσοι Όροι ως Μέθοδος Πρόβλεψης



FSU

Τεχνική Backcasting

t	Y_t	ΚΜΟ(5)
-1		
0		
1	15	;
2	17	;
3	19	16,00
4	15	16,20
5	14	16,80
6	16	15,40
7	20	;
8	12	;
9		
10		

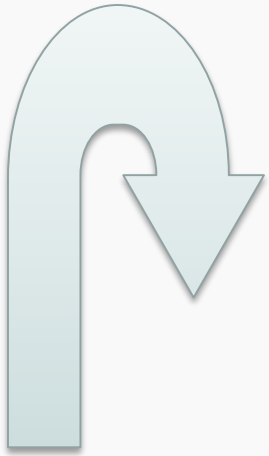
t	Y_t	ΚΜΟ(5)
-1		
0		
1	15	;
2	17	;
3	19	16,00
4	15	16,20
5	14	16,80
6	16	15,40
7	20	14,80
8	12	14,40
9	**12**	
10	**12**	

Naive Forecast: $F_{t+m} = Y_t$

FSU

Τεχνική Backcasting

t	Y_t
-1	
0	
1	15
2	17
3	19
4	15
5	14
6	16
7	20
8	12



t'	Y_t'
8	12
7	20
6	16
5	14
4	15
3	19
2	17
1	15
0	**15**
-1	**15**

t	Y_t	KMO(5)
-1	**15**	
0	**15**	
1	15	16,20
2	17	16,20
3	19	16,00
4	15	16,20
5	14	16,80
6	16	15,40
7	20	14,80
8	12	14,40
9	12	
10	12	

Naive Forecast: $F_{t+m} = Y_t$

FSU

Βήματα Κλασικής Μεθόδου Αποσύνθεσης

Επιχειρηματικές Προβλέψεις: Μέθοδοι & Τεχνικές



Βήμα 1ο

Υπολογισμός ενός κινητού μέσου όρου ο οποίος βασίζεται στο μήκος της εποχιακότητας



Βήμα 2ο

Διαίρεση των πραγματικών δεδομένων με τις αντίστοιχες τιμές των κινητών μέσων όρων



Βήμα 3ο

Απαλοιφή της τυχαιότητας από τους λόγους εποχιακότητας του Βήματος 2.



Βήμα 4ο

Διαίρεση των πραγματικών δεδομένων με τους αντίστοιχους δείκτες εποχιακότητας για την εύρεση της αποεποχικοποιημένης σειράς.



Βήμα 5ο

Απαλοιφή της τυχαιότητας από την αποεποχικοποιημένη σειρά.



Βήμα 6ο

Υπολογισμός της τάσης από τη σειρά τάσης-κύκλου του Βήματος 5.

.



Βήμα 7ο

Πρόβλεψη μέσω αποσύνθεσης

Κλασική Μέθοδος Αποσύνθεσης

Η κλασική μέθοδος αποσύνθεσης αποτελεί την πιο απλή διαδικασία για την απομόνωση των 4 συνιστωσών μιας χρονοσειράς.

Βήμα 1ο: Υπολογισμός ενός κινητού μέσου όρου ο οποίος βασίζεται στο μήκος της εποχιακότητας (για παράδειγμα, κινητός μέσος όρος 7 παρατηρήσεων για ημερήσια δεδομένα).
Με αυτόν τον τρόπο ο υπολογιζόμενος κινητός μέσος όρος δεν περιέχει εποχιακότητα ενώ περιέχει πολύ μικρή ή μηδενική τυχαιότητα, δεδομένου ότι η τυχαιότητα αντιπροσωπεύεται από τυχαίες διακυμάνσεις που κυμαίνονται γύρω από το μέσο όρο των παρατηρήσεων.
Οι τιμές των κινητών μέσων όρων που υπολογίζονται με αυτόν τον τρόπο είναι εξομαλυμένες και δίνουν μια καλή εκτίμηση της συμπεριφοράς της χρονοσειράς όσον αφορά την τάση και την κυκλικότητα. Οπότε, μπορούμε να θεωρήσουμε πως:

$$\mathrm{KMO(n)} = \mathrm{T} \times \mathrm{C}$$

όπου KMO(n) είναι ένας κινητός μέσος όρος μήκους n και T, C οι συνιστώσες τάσης και κύκλου αντίστοιχα. Στην περίπτωση που τα δεδομένα έχουν μήκος εποχιακότητας άρτιο αριθμό (για παράδειγμα μηνιαίες ή τριμηνιαίες παρατηρήσεις), τότε προτιμάται η χρήση κεντρικού κινητού μέσου όρου αντίστοιχου μήκους.

Κλασική Μέθοδος Αποσύνθεσης

Βήμα 2ο: Διαίρεση των πραγματικών δεδομένων με τις αντίστοιχες τιμές των κινητών μέσων όρων. Με τον τρόπο αυτό προκύπτουν οι λόγοι εποχιακότητας, οι οποίοι, όμως, περιέχουν τυχαιότητα:

$$\frac{Y}{KMO(n)} = \frac{T \times C \times S \times R}{T \times C} = S \times R$$

Βήμα 3ο: Απαλοιφή της τυχαιότητας από τους λόγους εποχιακότητας του Βήματος 2.
Η διαδικασία επιτυγχάνεται με εύρεση της μέσης τιμής των αντίστοιχων λόγων εποχιακότητας, δηλαδή των λόγων που αναφέρονται σε αντίστοιχες χρονικές περιόδους. Στην περίπτωση, για παράδειγμα, μηνιαίων δεδομένων, υπολογίζουμε το μέσο όρο των λόγων εποχιακότητας που αντιστοιχούν στο μήνα Ιανουάριο, κατόπιν το μέσο όρο των λόγων εποχιακότητας που αντιστοιχούν στο μήνα Φεβρουάριο κοκ. Οι υπολογισμένοι μέσοι όροι αποτελούν τους δείκτες εποχιακότητας της αρχικής μας χρονοσειράς.
Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι δείκτες εποχιακότητας χρήζουν κανονικοποίησης, ούτως ώστε το άθροισμά τους να ισούται με το μήκος της εποχιακότητας.
Αν η χρονοσειρά περιέχει αρκετή τυχαιότητα ή ασυνήθιστες τιμές, προτείνεται ο υπολογισμός των ενδιάμεσων μέσων όρων, προκειμένου να προκύψουν οι δείκτες εποχιακότητας. Η διαφοροποίηση έγκειται στη μη χρήση του μέγιστου και του ελάχιστου λόγου εποχιακότητας στον υπολογισμό του κάθε δείκτη εποχιακότητας, με στόχο τη σταθεροποίηση αυτών.

FSU

Κλασική Μέθοδος Αποσύνθεσης

Βήμα 4ο: Διαίρεση των πραγματικών δεδομένων με τους αντίστοιχους δείκτες εποχιακότητας για την εύρεση της αποεποχικοποιημένης σειράς.
Για παράδειγμα, στα μηνιαία δεδομένα, κάθε παρατήρηση που αντιστοιχεί στο μήνα Δεκέμβριο διαιρείται με τον δείκτη εποχιακότητας του Δεκεμβρίου.
Η σειρά που προκύπτει περιέχει μόνο τάση, κύκλο και τυχαιότητα:

$$\frac{Y}{S} = \frac{T \times C \times S \times R}{S} = T \times C \times R$$

Βήμα 5ο: Απαλοιφή της τυχαιότητας από την αποεποχικοποιημένη σειρά.
Αυτό επιτυγχάνεται υπολογίζοντας τον κινητό μέσο όρο μήκους 3 ή 6 παρατηρήσεων της αποεποχικοποιημένης σειράς.
Η σειρά των μέσων όρων που προκύπτει, αποτελεί μία αρκετά ομαλή και ακριβή σειρά τάσης-κύκλου.
Για βέλτιστη εξομάλυνση και απαλοιφή της τυχαιότητας συνίσταται η χρήση διπλού κινητού μέσου όρου 3×3. Αν το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός της συνιστώσας της τυχαιότητας, αυτή μπορεί να προκύψει από διαίρεση της αποεποχικοποιημένης σειράς και της σειράς τάσης-κύκλου:

$$\frac{T \times C \times R}{\text{ΚΜΟ}(3 \times 3)} = \frac{T \times C \times R}{T \times C} = R$$

Κλασική Μέθοδος Αποσύνθεσης

Βήμα 6ο: Υπολογισμός της τάσης από τη σειρά τάσης-κύκλου του Βήματος 5.
Μετά το 5ο Βήμα της αποσύνθεσης η σειρά που προκύπτει περιέχει τάση και κυκλικότητα. Σε περιπτώσεις που είναι επιθυμητός ο διαχωρισμός των δύο αυτών συνιστωσών, θα πρέπει να επιλεγεί το μοντέλο τάσης που περιγράφει καλύτερα τη χρονοσειρά.
Αν θεωρήσουμε γραμμική τάση, ο υπολογισμός της συνιστώσας της τάσης επιτυγχάνεται από εφαρμογή της απλής γραμμικής παλινδρόμησης (ευθεία ελαχίστων τετραγώνων):

$$T = \alpha + \beta \cdot t$$

$$\beta = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i \cdot TC_i)}{n} - \bar{t} \cdot \overline{TC}}{\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^2}{n} - \bar{t}^2}$$

$$\alpha = \overline{TC} - \beta \cdot \bar{t}$$

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$$

$$\overline{TC} = \frac{\sum_{i=1}^{n} TC_i}{n}$$

Όπου Τ δηλώνει την σειρά της τάσης, TC δηλώνει τις τιμές της σειράς τάσης κύκλου (εξαρτημένη μεταβλητή της γραμμικής παλινδρόμησης) και t δηλώνει τον αύξοντα αριθμό της χρονικής περιόδου (ανεξάρτητη μεταβλητή της γραμμικής παλινδρόμησης). Οι συντελεστές α και β δηλώνουν το αρχικό επίπεδο και την τάση αντίστοιχα. Αφού υπολογισθεί η σειρά της τάσης, μπορεί να ορισθεί και η συνιστώσα του κύκλου ως η ακόλουθη διαίρεση:

$$C = \frac{T \times C}{T}$$

FSU

Κλασική Μέθοδος Αποσύνθεσης

Βήμα 7ο: Πρόβλεψη μέσω αποσύνθεσης

Έχοντας αναλύσει την αρχική χρονοσειρά στις συνιστώσες της, μπορούμε να τις συνθέσουμε (πολλαπλασιαστικά) προκειμένου να εκτιμήσουμε μελλοντικές τιμές της χρονοσειράς.

Η διαδικασία αυτή λέγεται πρόβλεψη μέσω αποσύνθεσης και περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$F_{n+i} = T_i \times S_i \times C_i$$

Έλεγχος σημαντικής εποχιακής συμπεριφοράς

- Σε αρκετές περιπτώσεις η χρονοσειρά δεν εμφανίζει σημαντική εποχιακή συμπεριφορά, οπότε θα μπορούσαν να παραλειφθούν τα βήματα 1 έως 4 της κλασικής μεθόδου αποσύνθεσης.
- Ο έλεγχος σημαντικότητας της εποχιακής συμπεριφοράς μιας σειράς δεδομένων εφαρμόζεται μέσω ελέγχου αυτοσυσχέτισης δεδομένων με περίοδο καθυστέρησης (k) ίση με τον αριθμό των περιόδων ενός κύκλου εποχιακότητας (pos) σε σύγκριση με τις αυτοσυσχετίσεις περιόδου καθυστέρησης έως και μιας μονάδας μικρότερης από τον αριθμό των περιόδων ενός κύκλου εποχιακότητας.

Μία χρονοσειρά θεωρείται εποχιακή αν και μόνο αν ισχύει:

$$\left|\mathrm{ACF}_{\mathrm{pos}}\right| > Limit$$

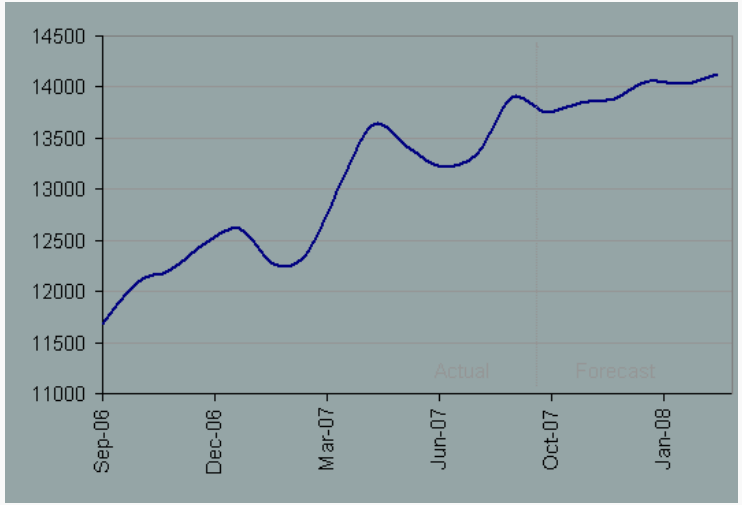
$$\mathrm{ACF}_{\mathrm{k}} = \frac{\sum_{\mathrm{i}=1+\mathrm{k}}^{\mathrm{n}}[(\mathrm{Y_i} - \overline{\mathrm{Y}}) \cdot (\mathrm{Y_{i-k}} - \overline{\mathrm{Y}})]}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{Y_i} - \overline{\mathrm{Y}})^2}$$

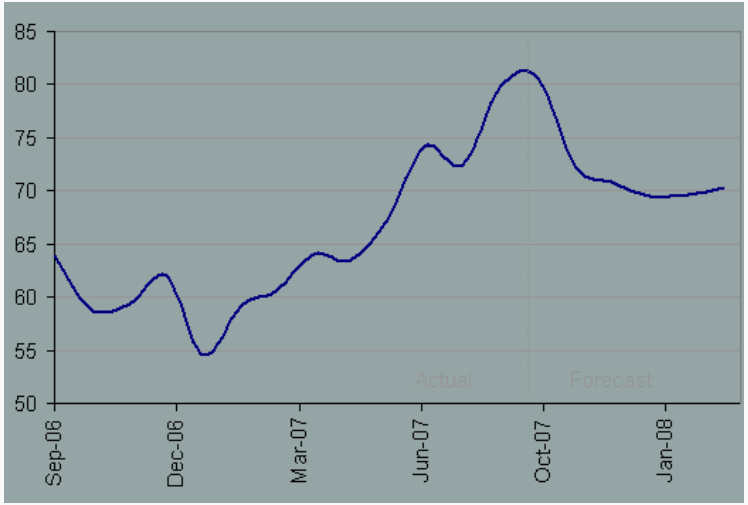
$$\mathrm{Limit} = \mathrm{t_{critical}}\sqrt{\frac{1 + 2 \cdot \left(\mathrm{ACF_1} + \sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{pos}-1}\mathrm{ACF_i^2}\right)}{\mathrm{n}}}$$

Confidence Level	$t_{critical}$
80%	1,28
90%	1,645
95%	1,96
98%	2,33
99%	2,58

FSU

Πρόβλεψη





Η μεγαλύτερη **πρόκληση** στην ανάλυση χρονοσειρών είναι η **πρόβλεψη**, δηλαδή πώς η ακολουθία των παρατηρήσεων θα συνεχιστεί στο μέλλον.

Το **ζητούμενο** είναι να ακολουθεί μια **διαδικασία** που θα εξασφαλίσει ότι θα παραχθούν όσο τον δυνατόν πιο **ακριβείς** προβλέψεις, **αξιοποιώντας** στο έπακρο όλη την διαθέσιμη **ιστορική πληροφορία**.

FSU

Στατιστική Πρόβλεψη





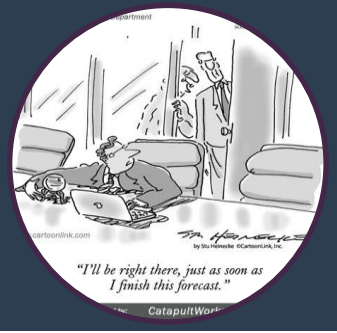
Κριτική Πρόβλεψη

Είδη Προβλέψεων

FSU

Πρόβλεψη Προϋπολογισμού





Τελική Πρόβλεψη

Είδη Προβλέψεων

Στατιστική Πρόβλεψη



Διαθέσιμη Ιστορική Πληροφορία (συνήθως επεξεργασμένη και εξομαλυμένη)

Στατιστική Μέθοδος Πρόβλεψης (μαύρο κουτί για τους managers)

Στατιστική Πρόβλεψη (δείχνει πως θα συνεχιστεί η ακολουθία των παρατηρήσεων στο μέλλον)

FSU

Στατιστική Πρόβλεψη - Πλεονεκτήματα

01 Άμεσα εφαρμόσιμες

02 Δεν προϋποθέτουν τεχνικές και στατιστικές γνώσεις προκειμένου να παραχθούν οι ζητούμενες προβλέψεις

03 Σχετικά ακριβείς (δεδομένων και των διαστημάτων εμπιστοσύνης)

04 Απαιτούν ελάχιστο χρόνο και λίγους υπολογιστικούς πόρους

FSU

Στατιστική Πρόβλεψη - Μειονεκτήματα

01 Προϋποθέτουν ότι το πρότυπο (συμπεριφορά) της δεδομένης χρονοσειράς θα συνεχιστεί στο μέλλον, γεγονός που δεν γίνεται πάντα

02 Δεν λαμβάνουν υπόψη ειδικά γεγονότα και ενέργειες που ενδέχεται να πραγματοποιηθούν (πχ. διαφημίσεις, αθλητικά συμβάντα)

03 Αρκετές στατιστικές μέθοδοι, προκειμένου να παράγουν προβλέψεις, απαιτούν αρκετές παρατηρήσεις (ιστορικά δεδομένα)

FSU

Στατιστική Πρόβλεψη
Κυριότερες Στατιστικές Μέθοδοι Πρόβλεψης

Naïve

Η πιο απλή στατιστική μέθοδος. Δεν παράγει ακριβείς προβλέψεις αλλά πολλές φορές χρησιμοποιείται ως benchmark για άλλες μεθόδους. Η πρόβλεψη θεωρείται πως είναι ίση με την τελευταία παρατήρηση της διαθέσιμης χρονοσειράς.



$F_{t+1} = y_T$

R-code: naive(y, h)

FSU

Στατιστική Πρόβλεψη
Κυριότερες Στατιστικές Μέθοδοι Πρόβλεψης

Seasonal Naïve

Πρόκειται για μία παραλλαγή της naïve και είναι χρήσιμη για δεδομένα με έντονη εποχιακότητα. Η πρόβλεψη θεωρείται πως είναι ίση με την τελευταία παρατήρηση της διαθέσιμης χρονοσειράς από την αντίστοιχη εποχή του χρόνου όμως.

$F_{t+1} = y_{T+h-km}$

m= seasonal period,

$k = \lfloor (h-1)/m \rfloor + 1$,

R-code: snaive(y, h)

FSU

Κινητοί Μέσοι Όροι για πρόβλεψη

Περίοδος	Δεδομένα	ΚΜΟ(3)	ΚΜΟ(5)
1	106,5		
2	109,2		
3	117,8		
4	117,2	111,17	
5	116,9	114,73	
6	118,7	117,30	113,52
7	115,6	117,60	115,96
8	119,0	117,07	117,24
9	134,7	117,77	117,48
10	130,4	123,10	120,98
11	126,2	128,03	123,68
12		130,43	125,18

$$F_{t+1} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=t-k+1}^{t} Y_i$$

R-code: ma(y, h, drift=TRUE)

Στατιστική Πρόβλεψη
Κυριότερες Στατιστικές Μέθοδοι Πρόβλεψης

Μέθοδοι Εκθετικής Εξομάλυνσης

Αναπτύχθηκαν τις αρχές της δεκαετίας του ‘50. Από τότε έγιναν από τις πιο δημοφιλείς μεθόδους προβλέψεων μεταξύ των επιχειρηματιών κυρίως λόγω της ευκολίας τους, της ελάχιστης απαίτησης σε υπολογιστικό χρόνο και την ύπαρξη σχετικά λίγων παρατηρήσεων προκειμένου να παράγουν προβλέψεις. Οι μέθοδοι εξομάλυνσης είναι κατάλληλες για βραχυπρόθεσμες προβλέψεις ενός μεγάλου όγκου χρονοσειρών. Αποδίδουν καλύτερα σε δεδομένα που παρουσιάζουν στασιμότητα ή μικρό ρυθμό ανάπτυξης ή μείωσης ως προς το χρόνο.

Κυριότερες μέθοδοι εξομάλυνσης:

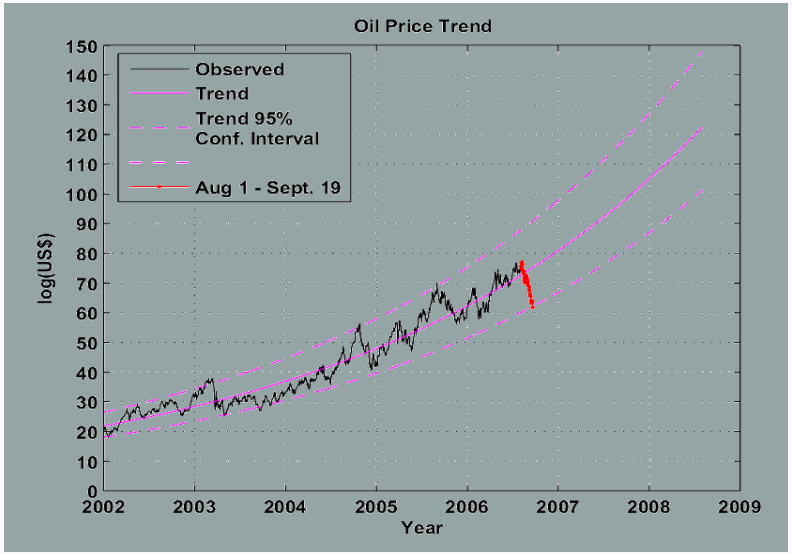
- ✓ Simple Exponential Smoothing
- ✓ Holt
- ✓ Damped
- ✓ Winter

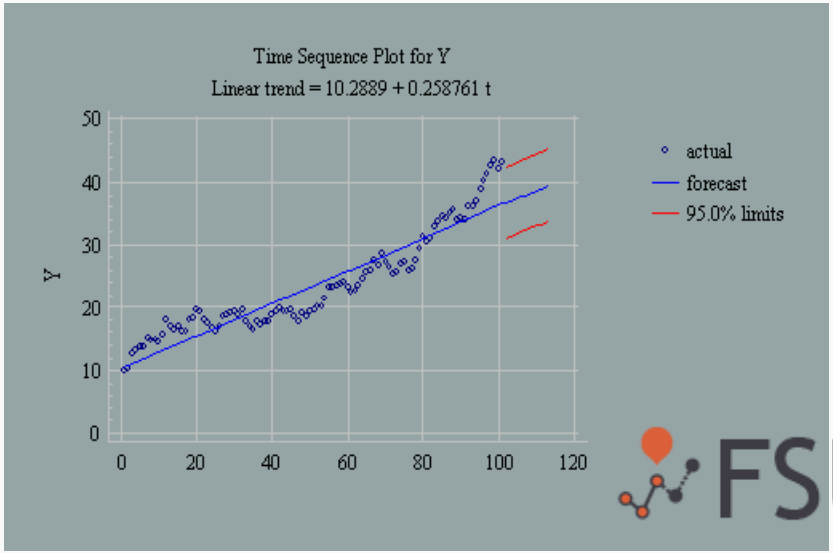
FSU

Στατιστική Πρόβλεψη
Κυριότερες Στατιστικές Μέθοδοι Πρόβλεψης

Linear & Exponential Trend

Στη στατιστική, η ανάλυση της παλινδρόμησης μελετά τη σχέση μεταξύ μιας εξαρτημένης μεταβλητής (μεταβλητή αντίδρασης/ανταπόκρισης) με συγκεκριμένες ανεξάρτητες μεταβλητές (επεξηγηματικές μεταβλητές). Οι μέθοδοι γραμμικής και εκθετικής τάσης είναι κατάλληλες για την παραγωγή μακροπρόθεσμων προβλέψεων.





Στατιστική Πρόβλεψη
Κυριότερες Στατιστικές Μέθοδοι Πρόβλεψης

Multiple Regression

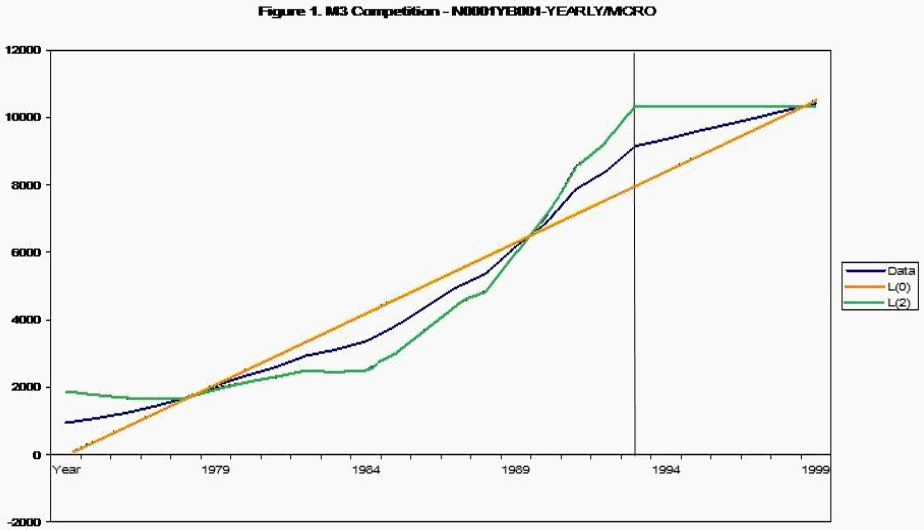
Αξία	Ετος Κατασκευής	Εμβαδόν	Οροφος	Αριθμός Υπν.	Θέα	Προσανατολισμός
81000	1995	100	2	3	1	1
61000	1998	65	3	1	1	2
56000	1992	70	2	2	2	3
90000	2000	90	4	2	3	1
80800	1994	86	5	2	4	2
56400	1993	68	2	2	3	2
95000	1997	105	3	3	2	2
101000	1999	95	5	3	5	2
66400	1995	73	2	2	3	3
85200	2000	84	3	2	4	1
79400	1991	98	3	3	3	2
105000	1993	120	4	3	5	1
47000	1998	50	1	1	1	3

FSU

Στατιστική Πρόβλεψη
Κυριότερες Στατιστικές Μέθοδοι Πρόβλεψης

Μέθοδος Theta

Η μέθοδος πρόβλεψης Theta βασίζεται στην τροποποίηση των τοπικών καμπυλοτήτων της χρονοσειράς. Η αρχική χρονοσειρά αποσυντίθεται σε δύο ή περισσότερες γραμμές Theta. Κάθε μία από αυτές προεκτείνεται ξεχωριστά και οι προβλέψεις τους συνδυάζονται.



Στατιστική Πρόβλεψη

Μέθοδος Διακοπτόμενης Ζήτησης

Croston Forecasting Method

Εφαρμόζεται σε περιπτώσεις όπου τα δεδομένα περιέχουν πολλά μηδενικά, δηλαδή η ζήτηση δεν είναι συνεχής αλλά διακοπτόμενη. Τέτοια μορφή μπορεί να έχουν για παράδειγμα τα δεδομένα από αποθήκες ανατλλακτικών.

Demand Forecast *=*

(Volume Forecast) / (Interval Forecast)

where:

(Interval Forecast) *= the exponentially smoothed (or moving average) inter-demand interval, updated only if demand occurs in period*

(Volume Forecast) *= the exponentially smoothed (or moving average) size of demand, updated only if demand occurs in period*

FSU

Στατιστική Πρόβλεψη
Κυριότερες Στατιστικές Μέθοδοι Πρόβλεψης

ARIMA

- Τα ολοκληρωμένα αυτοπαλινδρομικά μοντέλα κινητού μέσου όρου (AutoRegressive-Integrated-Moving Average) είναι στοχαστικά μαθηματικά μοντέλα με τα οποία προσπαθούμε να περιγράψουμε τη διαχρονική εξέλιξη κάποιου φυσικού μεγέθους.

- Δεδομένου ότι για την πλειοψηφία των φυσικών μεγεθών είναι αδύνατη η πλήρης γνώση και καταγραφή όλων των παραγόντων που επηρεάζουν την εξέλιξη τους στο χρόνο, είναι πολύ δύσκολη η διαχρονική περιγραφή του μεγέθους από ένα ντετερμινιστικό μοντέλο.

- Από την άλλη μεριά, η εξάρτηση τέτοιων μεγεθών από μη ντετερμινιστικούς παράγοντες (π.χ. καιρός, τυχαία γεγονότα) καθιστά δυνατή την περιγραφή της διαχρονικής τους εξέλιξης από ένα στοχαστικό μοντέλο, με το οποίο μπορεί να υπολογιστεί η πιθανότητα με την οποία η τιμή του μεγέθους βρίσκεται σε κάποιο διάστημα.

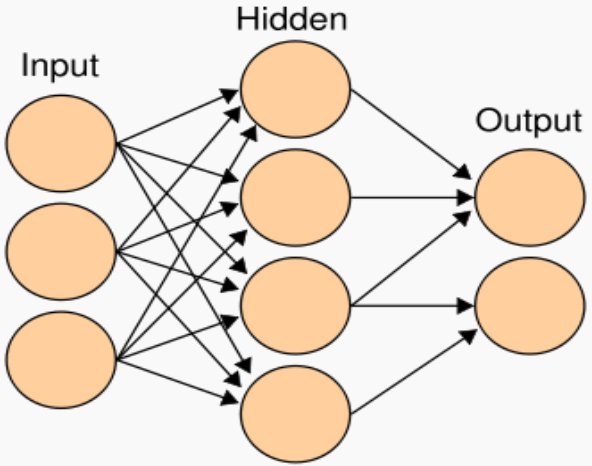
- Τα στοχαστικά μοντέλα περιέχουν τον τυχαίο παράγοντα (τυχαίο σφάλμα ή σφάλμα πρόβλεψης), τις τιμές του μεγέθους οι οποίες εμφανίστηκαν σε προηγούμενες χρονικές στιγμές και ίσως κάποιους άλλους στοχαστικούς παράγοντες. Το μοντέλο που προκύπτει είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω ποσοτήτων.

FSU

Στατιστική Πρόβλεψη
Σύγχρονες Μέθοδοι Πρόβλεψης

Νευρωνικά Δίκτυα (Neural Networks)

Τα νευρωνικά δίκτυα χρειάζονται αφενός αρκετά δεδομένα (προκειμένου να εκπαιδευτεί το δίκτυο) και αφετέρου είναι συνήθως χρονοβόρα. Παράγουν αρκετά ακριβείς προβλέψεις, ανάλογα πάντα με την εκάστοτε εφαρμογή. Έχουν όμως και αρκετούς επικριτές.

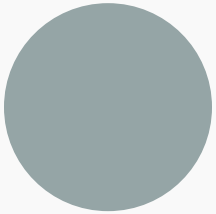


FSU

Κριτική Πρόβλεψη

- Οι κριτικές μέθοδοι πρόβλεψης δεν έχουν τις ίδιες απαιτήσεις σε δεδομένα με τις στατιστικές μεθόδους. Τα δεδομένα των μεθόδων αυτών αποτελούν προϊόν διαίσθησης, κρίσης και συσσωρευμένης γνώσης. Οι κριτικές μέθοδοι είναι αυτές που χρησιμοποιούνται συχνά σε επιχειρήσεις και οργανισμούς.
- Στις κριτικές μεθόδους η πρόβλεψη μπορεί να βασίζεται είτε στις γνώσεις και την κρίση ενός ατόμου (ατομικές μέθοδοι) είτε να προκύπτει από την ανταλλαγή και το συνδυασμό απόψεων των μελών κάποιας επιτροπής (μέθοδοι επιτροπής).
- Μπορεί να λάβει υπόψιν ειδικά γεγονότα και ενέργειες
- Έχει τη δυνατότητα να αντισταθμίζει ανεπάρκειες και ελλείψεις στα ιστορικά δεδομένα
- Είναι κατάλληλη όταν θίγονται ηθικά ζητήματα που υπερισχύουν των οικονομικών ή τεχνολογικών παραγόντων
- Επιτρέπουν την επεξεργασία της πρόβλεψης σε περιπτώσεις όπου οι διευθυντές τις επιχείρησης επιθυμούν να έχουν έλεγχο στο προϊόν του οποίου η ζήτηση θα προβλεφθεί
- Μπορεί να παράγει πιο αποδεκτές προβλέψεις
- Πολύπλοκες στατιστικές μέθοδοι, που δεν είναι ξεκάθαρο τι κάνουν, αντιμετωπίζονται συχνά με δυσπιστία

FSU



Κριτική Πρόβλεψη

Το μεγαλύτερο πρόβλημα των κριτικών προβλέψεων είναι η προκατάληψη, δηλαδή η έμφυτη τάση των ανθρώπων να παρουσιάζονται αισιόδοξοι ή απαισιόδοξοι.

FSU

Κριτική Πρόβλεψη

Συμπερασματικά, Στατιστικές και Κριτικές Προβλέψεις είναι συνήθως συμπληρωματικές

Οι άνθρωποι προσαρμόζονται ευκολότερα και μπορούν να λάβουν υπόψην τους γεγονότα εκτός προτύπου χρονοσειράς, αλλά είναι ασυνεπείς και παρουσιάζουν αυξημένη προκατάληψη

Οι στατιστικές μέθοδοι είναι αυστηρές αλλά συνεπείς, και δύνανται να αντιμετωπίσουν μεγάλο όγκο πληροφορίας, πολύ γρήγορα.

FSU

Πρόβλεψη Προϋπολογισμού (Στόχου)

01 Αναφέρεται στην πρόβλεψη του διευθυντή ανάπτυξης

02 Δεδομένου ενός καθορισμένου ετήσιου ρυθμού ανάπτυξης (growth rate), καθορίζεται ο επιθυμητός ρυθμός ανάπτυξης και οι προβλέψεις προσαρμόζονται ανάλογα

03 Πρόκειται περισσότερο για wish-future-status παρά για πραγματική πορεία της χρονοσειράς και ακριβή πρόβλεψη

04 Περιέχει αρκετή αισιοδοξία και μεροληψία (biased) και συνήθως μεγάλα σφάλματα

05 Καθορίζει τους στόχους της επιχείρησης και ωθεί την πολιτική ανάπτυξης προς αυτή την κατεύθυνση

FSU

Τελική Πρόβλεψη

- Αναφέρεται στην τελική πρόβλεψη που θα επιλεχθεί ώστε να γίνει εν συνεχεία ο στρατηγικός σχεδιασμός της επιχείρησης και ο σχεδιασμός της παραγωγής για τον ορίζοντα πρόβλεψης
- Η Τελική Πρόβλεψη καθορίζεται από την διοίκηση της κάθε μονάδας της επιχείρησης ως συνάρτηση των υπολοίπων κατηγοριών πρόβλεψης (Στατιστική, Κριτική και Προϋπολογισμού)
- Επίσης, η Τελική Πρόβλεψη έχει χαρακτηριστικά κριτικής πρόβλεψεις, δεδομένου ότι επί της τελικής επιλογής μπορούν να πραγματοποιηθούν αλλαγές και τροποποιήσεις βάσει πληροφοριών της διοίκησης και οι οποίες θα οδηγήσουν σε ακριβέστερες προβλέψεις

FSU

Ορίζοντας Πρόβλεψης

- Σπάνια χρειαζόμαστε να προβλέψουμε μόνο την αμέσως επόμενη παρατήρηση της χρονοσειράς μας. Στην πράξη θα μας ζητείται να δώσουμε προβλέψεις για αρκετές περιόδους στο μέλλον
- Ο ορίζοντας πρόβλεψης είναι ο δείκτης που δείχνει πόσες παρατηρήσεις τις χρονοσειράς χρειαζόμαστε να προβλέψουμε
- Ανάλογα την τιμή του ορίζοντα πρόβλεψης, επιλέγεται και η κατάλληλη στατιστική μέθοδος πρόβλεψης, καθώς ως γνωστόν, δεν ενδείκνυνται όλες οι μέθοδοι για βραχυπρόθεσμη ή αντίστοιχα μακροπρόθεσμη πρόβλεψη

FSU

Ορίζοντας Πρόβλεψης

Συμπερασματικά, Στατιστικές και Κριτικές Προβλέψεις είναι συνήθως συμπληρωματικές



Βραχυπρόθεσμη πρόβλεψη (Inventory - Σχεδιασμός Αποθήκης)
Συνήθως ορίζοντας πρόβλεψης <3 περιόδους



Μεσοπρόθεσμη πρόβλεψη (Budget – Οικονομικός Σχεδιασμός)
Συνήθως ορίζοντας πρόβλεψης ~1+ οικονομικό έτος (δλδ 12-15, αν αναφερόμαστε σε μηνιαία δεδομένα)



Μακροπρόθεσμη πρόβλεψη (Long Term – Σχεδιασμός Επενδύσεων και Ανάπτυξης)
Συνήθως ορίζοντας πρόβλεψης ≥3 έτη

FSU

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Μονάδα Προβλέψεων & Στρατηγικής
Forecasting & Strategy Unit



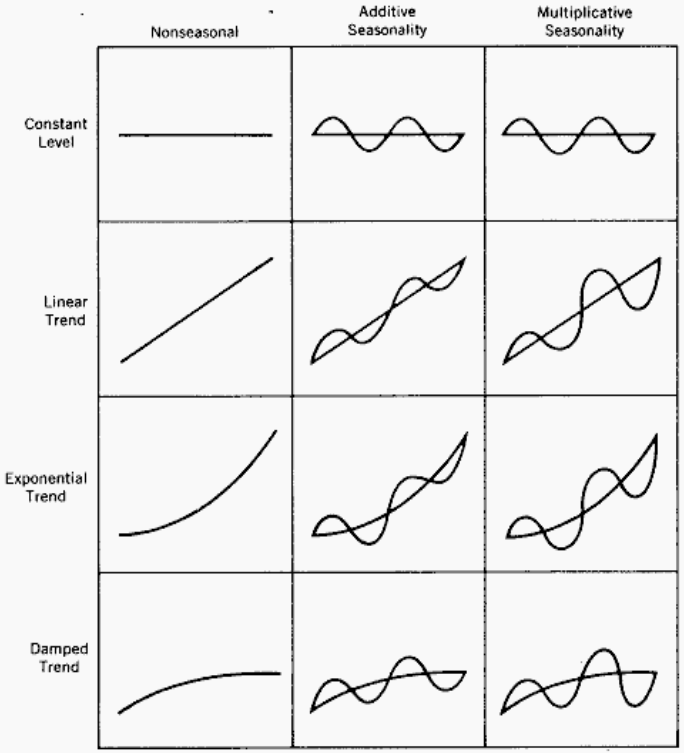
Μέθοδοι Εκθετικής Εξομάλυνσης

Εκθετική Εξομάλυνση
(Exponential Smoothing)

- Μέθοδος πρόβλεψης η οποία εξομαλύνει τα ιστορικά δεδομένα.
- Υπολογίζεται ο μέσος όρος των δεδομένων, με την χρήση συντελεστών βαρύτητας.
- Τα πιο πρόσφατα δεδομένα έχουν μεγαλύτερη βαρύτητα.
- Οι συντελεστές βαρύτητας μειώνονται με εκθετικό τρόπο, όσο παλαιότερα είναι τα δεδομένα.
- Στόχος η απομόνωση του προτύπου των δεδομένων από τις τυχαίες διακυμάνσεις.
- Χρησιμοποιείται ευρέως για βραχυπρόθεσμο σχεδιασμό.
- Είναι σχετικά εύκολη στην χρήση.
- Απαιτεί ελάχιστα ιστορικά δεδομένα και χρόνο υπολογισμού.
- Είναι ικανοποιητικά ακριβής σε σχέση με πολυπλοκότερες μεθόδους πρόβλεψης.

FSU

Τύποι Μοντέλων Εξομάλυνσης



- **Σταθερού Επιπέδου**
  - ✓ Για πρόβλεψη ενός βήματος.
  - ✓ Για χρονοσειρές που περιέχουν υψηλό θόρυβο ή τυχαιότητα.
- **Γραμμικής τάσης**
  - ✓ Για σταθερή αύξηση στο μέλλον.
- **Εκθετικής τάσης**
  - ✓ Για εκθετική αύξηση στο μέλλον (π.χ. στις αρχές του κύκλου ζωής ενός προϊόντος).
  - ✓ Είναι υπεραισιόδοξες για μακροπρόθεσμες προβλέψεις.
- **Φθίνουσας τάσης**
  - ✓ Για μεσοπρόθεσμες προβλέψεις.

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES

Χρόνος t	Δεδομένα X_t	Πρόβλεψη F $\hat{X}_{t-1}(1)$	Σφάλμα e_t	Επίπεδο στο τέλος της περιόδου t $S_t = S_{t-1} + h_1 e_t$			
0				S0	=		585
1	545	585	-40	S1	= 585 +	0.4(-40)	= 569
2	635	569	66	S2	= 569 +	0.4(6.6)	= 595.4
3	420	595,4	-175,4	S3	= 595.4 +	0.4(-175.4)	= 525.2
4	716	525,2	190,8	S4	= 525.2 +	0.4(190.8)	= 601.5
5	699	601,5	97,5	S5	= 601.5 +	0.4(97,5)	= 640.5
6	681	640,5	40,5	S6	= 640,5 +	0.4(40.5)	= 656.5
7	763	656,5	106,3	S7	= 656.5 +	0.4(106.3)	= 699.2
8	778	699,2	78,8	S8	= 699.2 +	0.4(78.8)	= 730.5
9	690	730,5	-40,5	S9	= 730.5 +	0.4(-40.5)	= 711.4
10	707	711,4	-7,4	S10	= 711.4 +	0.4(-7.4)	= 711.5
11	716	711,5	4,5	S11	= 711.5 +	0.4(4.5)	= 713.3
12		713,3					

$$e_t = Y_t - F_t$$

$$S_t = S_{t-1} + \alpha \cdot e_t$$

$$F_{t+1} = S_t$$

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES (0)

Εξίσωση Σφάλματος

$$e = Y_{t-1} - F_{t-1}$$

Εξίσωση Επιπέδου & Πρόβλεψης

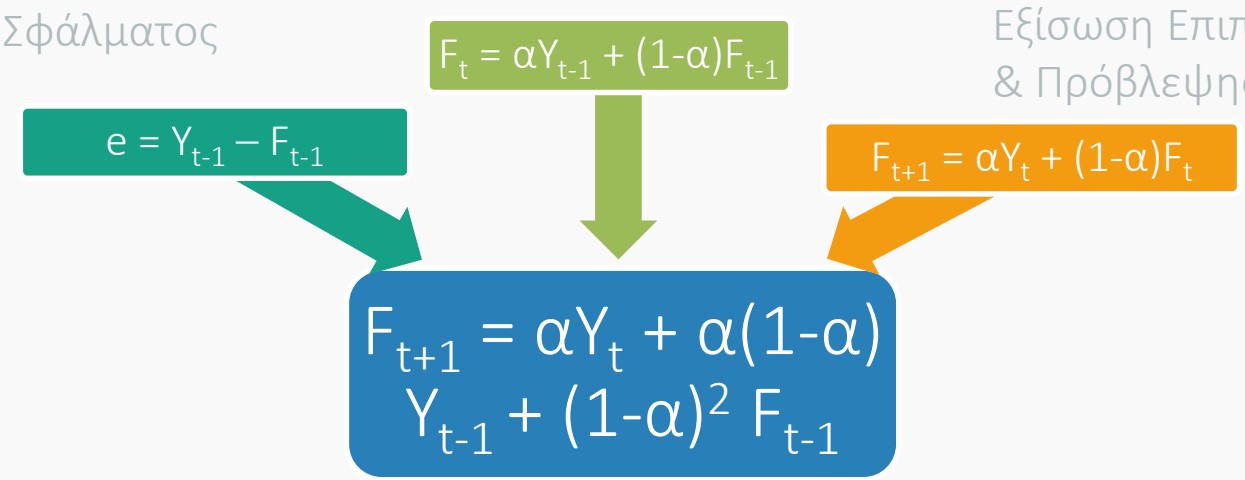
$$F_t = F_{t-1} + \alpha e$$

$$F_t = F_{t-1} + \alpha(Y_{t-1} - F_{t-1})$$

$$F_t = \alpha Y_{t-1} + (1-\alpha)F_{t-1}$$

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES (I)



Ομοίως αντικαθιστώντας στην (3) το F_{t-1}, κοκ , προκύπτει:

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)\, Y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2\, Y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3\, Y_{t-3}\, \alpha(1-\alpha)^4\, Y_{t-4} + \ldots$$

$$\ldots + \alpha(1-\alpha)^{t-1}\, Y_1 + (1-\alpha)^t F_1$$

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES (II)

Από την εξίσωση (4) παρατηρούμε

- Ότι οι συντελεστές (βάρη) των των ιστορικών δεδομένων Υ μειώνονται εκθετικά για αυτό και το όνομα της μεθόδου «εκθετική εξομάλυνση».
- Ότι ο τελευταίος όρος είναι ο $(1-\alpha)^t F_1$. Αυτό σημαίνει ότι η αρχική πρόβλεψη παίζει ρόλο σε όλες τις επόμενες προβλέψεις. Στο παράδειγμα μας υπολογίζονται τα βάρη για t = 11, ισχύει :

$(1-\alpha)^t = 0.3138$ αν $\alpha = 0.1$

$(1-\alpha)^t = 0.0004$ αν $\alpha = 0.5$

$(1-\alpha)^t = 0.0000$ αν $\alpha = 0.9$

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES (III)

- ✓ Όσο μικρότερη τιμή του α επιλέξουμε τόσο μεγαλύτερο ρόλο παίζει η πρώτη τιμή της πρόβλεψης που θα επιλέξουμε F1.
- ✓ Όσο περισσότερα δεδομένα έχουμε τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του t, οπότε τόσο μικρότερο είναι το βάρος του F1.

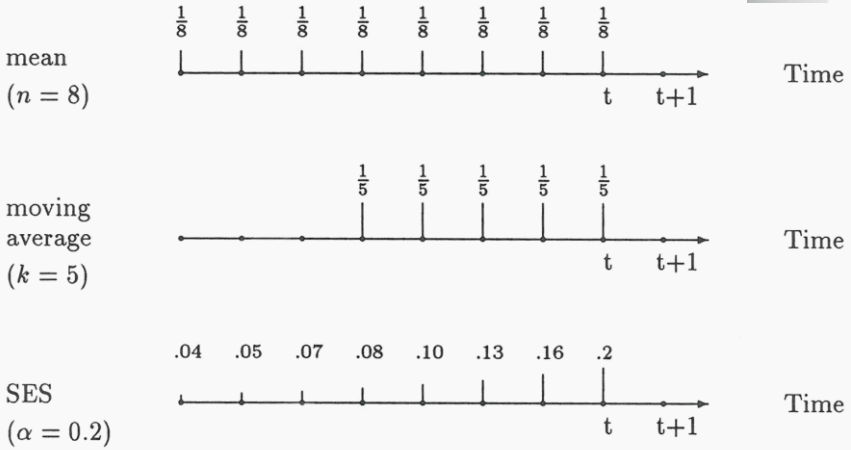
Π.χ. για t = 12 και α=0.1 το βάρος ισούται με 0.2824

για t = 24 και α=0.1 το βάρος ισούται με 0.0798

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου (IV)

Weight assigned to:	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$
Y_t	0.2	0.4	0.6	0.8
Y_{t-1}	0.16	0.24	0.24	0.16
Y_{t-2}	0.128	0.144	0.096	0.032
Y_{t-3}	0.1024	0.0864	0.0384	0.0064
Y_{t-4}	$(0.2)(0.8)^4$	$(0.4)(0.6)^4$	$(0.6)(0.4)^4$	$(0.8)(0.2)^4$



Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES (VI)

- ✓ Σαν αρχική πρόβλεψη συνήθως χρησιμοποιούμε:
  - ✓ Μέσος όρος των παρατηρήσεων
  - ✓ Μέσος όρος των τεσσάρων ή πέντε πρώτων παρατηρήσεων
  - ✓ Πρώτη παρατήρηση
  - ✓ Σταθερό επίπεδο από μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES (VII)

Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Εξομάλυνσης

- ✓ Η βέλτιστη τιμή του α καθορίζεται από την ελαχιστοποίηση του σφάλματος (MSE, MAPE , ή άλλων)
- ✓ Το α μπορεί να είναι διαφορετικό όταν στοχεύουμε στην ελαχιστοποίηση του MSE, και άλλο για την ελαχιστοποίηση του MAPE, κλπ
- ✓ Το α κυμαίνεται μεταξύ του διαστήματος [0,1].
- ✓ Υπολογίζουμε τα σφάλματα για κάθε τιμή του α, για κάθε τιμή του in sample

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου – SES (VII)

Εύρεση Βέλτιστου Συντελεστή Εξομάλυνσης

- ✓ Η βέλτιστη τιμή του α καθορίζεται από την ελαχιστοποίηση του σφάλματος (MSE, MAPE , ή άλλων)
- ✓ Το α μπορεί να είναι διαφορετικό όταν στοχεύουμε στην ελαχιστοποίηση του MSE, και άλλο για την ελαχιστοποίηση του MAPE, κλπ
- ✓ Το α κυμαίνεται μεταξύ του διαστήματος [0,1].
- ✓ Υπολογίζουμε τα σφάλματα για κάθε τιμή του α, για κάθε τιμή του in sample
- ✓ Ένας τρόπος για τη βελτιστοποίηση του α είναι ο υπολογισμόςτου MSE για κάποιο αριθμό τιμών του α (πχ 0.1, 0.2, ..., 0.9) και επιλογή εκείνου που δίνει το μικρότερο σφάλμα MSE.
- ✓ Εναλλακτικός τρόπος είναι η χρήση ενός μη γραμμικού αλγορίθμου βελτιστοποίησης.

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (Ι)

t	Y
0	
1	200
2	135
3	195
4	197,5
5	310
6	175
7	155
8	130
9	220
10	277,5
11	235
12	???

- Μηνιαία δεδομένα t
- Αριθμός μηνιαίων φορτώσεων Y_t

Ζητείται η πρόβλεψη Δεκεμβρίου.

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (ΙΙ)

t	Y	F	e	S = F + a*e	S = a*Y + (1-a)*F	S
0						167,5
1	200	167,5	32,5	167,5 + 0.2 * 32,5	0.2 * 200 + 0.8 * 167,5	174,0
2	135	174,0	-39,0	174 + 0.2 * -39	0.2 * 135 + 0.8 * 174	166,2
3	195	166,2	28,8	166,2 + 0.2 * 28,8	0.2 * 195 + 0.8 * 166,2	172,0
4	197,5	172,0	25,5	172 + 0.2 * 25,5	0.2 * 197,5 + 0.8 * 172	177,1
5	310	177,1	132,9	177,1 + 0.2 * 132,9	0.2 * 310 + 0.8 * 177,1	203,7
6	175	203,7	-28,7	203,7 + 0.2 * -28,7	0.2 * 175 + 0.8 * 203,7	197,9
7	155	197,9	-42,9	197,9 + 0.2 * -42,9	0.2 * 155 + 0.8 * 197,9	189,3
8	130	189,3	-59,3	189,3 + 0.2 * -59,3	0.2 * 130 + 0.8 * 189,3	177,5
9	220	177,5	42,5	177,5 + 0.2 * 42,5	0.2 * 220 + 0.8 * 177,5	186,0
10	277,5	186,0	91,5	186 + 0.2 * 91,5	0.2 * 277,5 + 0.8 * 186	204,3
11	235	204,3	30,7	204,3 + 0.2 * 30,7	0.2 * 235 + 0.8 * 204,3	210,4
12	???	210,4				

FSU

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (III)

t	Y	F	e	S = F + a*e	S = a*Y + (1-a)*F	S
0						167,5
1	200	167,5	32,5	167,5 + 0.2 * 32,5	0.2 * 200 + 0.8 * 167,5	174,0
2	135	174,0	-39,0	174 + 0.2 * -39	0.2 * 135 + 0.8 * 174	166,2
3	195	166,2	28,8	166,2 + 0.2 * 28,8	0.2 * 195 + 0.8 * 166,2	172,0
4	197,5	172,0	25,5	172 + 0.2 * 25,5	0.2 * 197,5 + 0.8 * 172	177,1
5	310	177,1	132,9	177,1 + 0.2 * 132,9	0.2 * 310 + 0.8 * 177,1	203,7
6	175	203,7	-28,7	203,7 + 0.2 * -28,7	0.2 * 175 + 0.8 * 203,7	197,9
7	155	197,9	-42,9	197,9 + 0.2 * -42,9	0.2 * 155 + 0.8 * 197,9	189,3
8	130	189,3	-59,3	189,3 + 0.2 * -59,3	0.2 * 130 + 0.8 * 189,3	177,5
9	220	177,5	42,5	177,5 + 0.2 * 42,5	0.2 * 220 + 0.8 * 177,5	186,0
10	277,5	186,0	91,5	186 + 0.2 * 91,5	0.2 * 277,5 + 0.8 * 186	204,3
11	235	204,3	30,7	204,3 + 0.2 * 30,7	0.2 * 235 + 0.8 * 204,3	210,4
12	???	210,4				

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (III)

α = 0.5

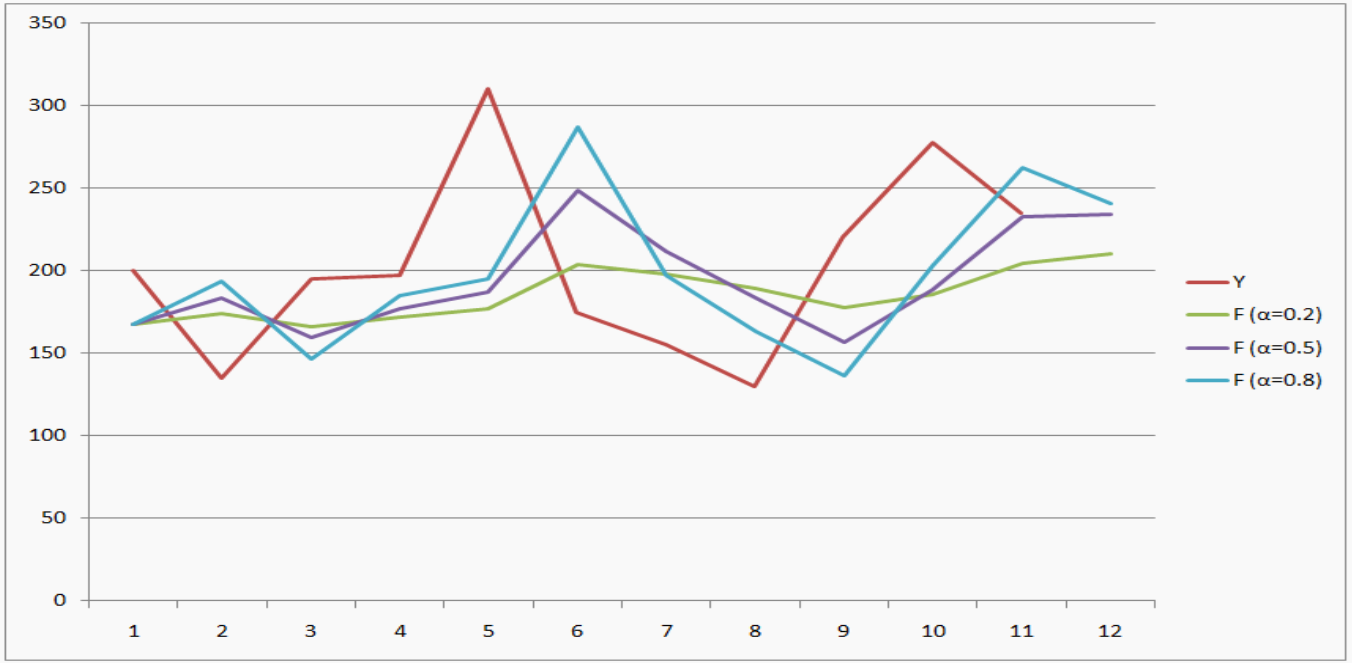
t	Y	F	e	S
0				167,5
1	200	167,5	32,5	183,8
2	135	183,8	-48,8	159,4
3	195	159,4	35,6	177,2
4	197,5	177,2	20,3	187,3
5	310	187,3	122,7	248,7
6	175	248,7	-73,7	211,8
7	155	211,8	-56,8	183,4
8	130	183,4	-53,4	156,7
9	220	156,7	63,3	188,4
10	277,5	188,4	89,1	232,9
11	235	232,9	2,1	234,0
12	???	234,0		

α = 0.8

t	Y	F	e	S
0				167,5
1	200	167,5	32,5	193,5
2	135	193,5	-58,5	146,7
3	195	146,7	48,3	185,3
4	197,5	185,3	12,2	195,1
5	310	195,1	114,9	287,0
6	175	287,0	-112,0	197,4
7	155	197,4	-42,4	163,5
8	130	163,5	-33,5	136,7
9	220	136,7	83,3	203,3
10	277,5	203,3	74,2	262,7
11	235	262,7	-27,7	240,5
12	???	240,5		

Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (IV)



Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (V)



Η μεγαλύτερη τιμή του α = (0.8) εξομαλύνει πολύ λίγο το μοντέλο ενώ η μικρότερη α= (0.2) δίνει την καλύτερη εξομάλυνση.

.



Αν το α = 1, τότε η εκθετική εξομάλυνση γίνεται Naive, ενώ αν α = 0 τότε η πρόβλεψή μας είναι σταθερή και ίση με την αρχική πρόβλεψη

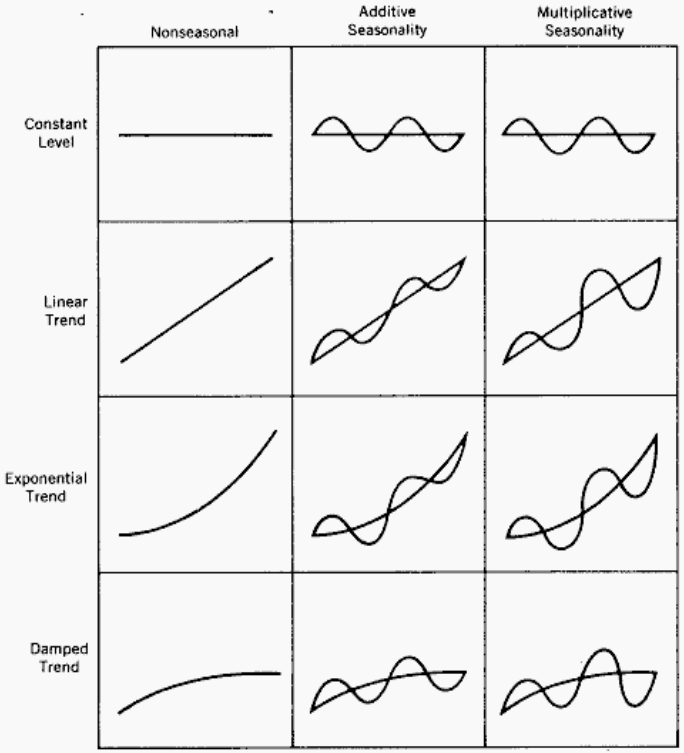
Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου

2ο Παράδειγμα (III)

t	Y	F (α=0.2)	E	AE	APE	SAPE
1	200	167,5	32,50	32,50	0,163	0,177
2	135	174,0	-39,00	39,00	0,289	0,252
3	195	166,2	28,80	28,80	0,148	0,159
4	197,5	172,0	25,54	25,54	0,129	0,138
5	310	177,1	132,93	132,93	0,429	0,546
6	175	203,7	-28,65	28,65	0,164	0,151
7	155	197,9	-42,92	42,92	0,277	0,243
8	130	189,3	-59,34	59,34	0,456	0,372
9	220	177,5	42,53	42,53	0,193	0,214
10	277,5	186,0	91,52	91,52	0,330	0,395
11	235	204,3	30,72	30,72	0,131	0,140
12		210,4				
		α=0.2	19,51	50,41	0,25	0,25
		α=0.5	12,08	54,39	0,27	0,27
		α=0.8	8,30	58,13	0,29	0,29

FSU

Τύποι Μοντέλων Εξομάλυνσης



- **Σταθερού Επιπέδου**
  - ✓ Για πρόβλεψη ενός βήματος.
  - ✓ Για χρονοσειρές που περιέχουν υψηλό θόρυβο ή τυχαιότητα.
- **Γραμμικής τάσης**
  - ✓ Για σταθερή αύξηση στο μέλλον.
- **Εκθετικής τάσης**
  - ✓ Για εκθετική αύξηση στο μέλλον (π.χ. στις αρχές του κύκλου ζωής ενός προϊόντος).
  - ✓ Είναι υπεραισιόδοξες για μακροπρόθεσμες προβλέψεις.
- **Φθίνουσας τάσης**
  - ✓ Για μεσοπρόθεσμες προβλέψεις.

FSU

Μοντέλο Γραμμικής Τάσης (Holt)

$$e_t = Y_t - F_t$$
$$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + a * e_t$$
$$T_t = T_{t-1} + a * b * e_t$$
$$\mathrm{F}_{t+m} = S_t + mT_t$$

Οι συντελεστές α και β πρέπει να υπολογίζονται, ώστε να ελαχιστοποιείται *συνήθως* το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), όπου 0<α<1, 0<β<a

- ✓ Χρειάζεται προσοχή στην αρχικοποίηση του μοντέλου.
- ✓ Πρέπει να εκτελείται μία γραμμική παλινδρόμηση, με το χρόνο ως ανεξάρτητη μεταβλητή.
- ✓ Ως αρχικό επίπεδο *συνήθως* ορίζεται η σταθερά Α της παλινδρόμησης.
- ✓ Ως αρχική τάση *συνήθως* ορίζεται η κλίση Β της παλινδρόμησης.

FSU

Μοντέλο Γραμμικής Τάσης (Holt)

$$e_t = Y_t - F_t$$
$$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + a * e_t$$
$$T_t = T_{t-1} + a * b * e_t$$
$$\mathrm{F}_{t+m} = S_t + mT_t$$

Οι συντελεστές α και β πρέπει να υπολογίζονται, ώστε να ελαχιστοποιείται *συνήθως* το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), όπου 0<α<1, 0<β<a

Η αρχικοποίηση του επιπέδου και της τάσης θα μπορούσε να γίνει εναλλακτικά:

- **Αρχικό Επίπεδο**
  - Πρώτη Παρατήρηση
  - Μέσος Όρος Ν πρώτων παρατηρήσεων
- **Αρχική Τάση**
  - Διαφορά δεύτερης και πρώτης παρατήρησης:(X_2-X_1)
  - Διαφορά ν-στής και πρώτης παρατήρησης διαιρεμένης με ν-1: (X_4-X_1)/3

FSU

Μοντέλο Γραμμικής Τάσης (Holt)

$e_t = Y_t - F_t$

$$S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + \alpha \cdot e_t$$

$$T_t = T_{t-1} + \beta \cdot e_t$$

$$F_{t+m} = S_t + m \cdot T_t$$

$h_1 = 0.20, h_2 = 0.10$

Time t	Data X_t	Forecast $X_{t-1}(1)$	Error e_t	Level at End of t $S_t = S_{t-1} + T_{t-1} + h_1 e_t$	Trend at End of t $T_t = T_{t-1} + h_2 e_t$	Forecast for $t+1$ $\hat{X}_t(1) = S_t + T_t$
0				$S_0 =$ 54.0	$T_0 =$ 2.0	$\hat{X}_0(1) = 54.0 + 2.0 = 56.0$
1	54.0	56.0	−2.0	$S_1 = 54.0 + 2.0 + 0.2(-2.0) = 55.6$	$T_1 = 2.0 + 0.1(-2.0) = 1.8$	$\hat{X}_1(1) = 55.6 + 1.8 = 57.4$
2	55.0	57.4	−2.4	$S_2 = 55.6 + 1.8 + 0.2(-2.4) = 56.9$	$T_2 = 1.8 + 0.1(-2.4) = 1.6$	$\hat{X}_2(1) = 56.9 + 1.6 = 58.5$
3	57.0	58.5	−1.5	$S_3 = 56.9 + 1.6 + 0.2(-1.5) = 58.2$	$T_3 = 1.6 + 0.1(-1.5) = 1.5$	$\hat{X}_3(1) = 58.2 + 1.5 = 59.7$
4	60.0	59.7	0.3	$S_4 = 58.2 + 1.5 + 0.2(0.3) = 59.8$	$T_4 = 1.5 + 0.1(0.3) = 1.5$	$\hat{X}_4(1) = 59.8 + 1.5 = 61.3$
5	66.0	61.3	4.7	$S_5 = 59.8 + 1.5 + 0.2(4.7) = 62.2$	$T_5 = 1.5 + 0.1(4.7) = 2.0$	$\hat{X}_5(1) = 62.2 + 2.0 = 64.2$
6	62.0	64.2	−2.2	$S_6 = 62.2 + 2.0 + 0.2(-2.2) = 63.8$	$T_6 = 2.0 + 0.1(-2.2) = 1.8$	$\hat{X}_6(1) = 63.8 + 1.8 = 65.6$
7	59.0	65.6	−6.6	$S_7 = 63.8 + 1.8 + 0.2(-6.6) = 64.3$	$T_7 = 1.8 + 0.1(-6.6) = 1.1$	$\hat{X}_7(1) = 64.3 + 1.1 = 65.4$
8	65.0	65.4	−0.4	$S_8 = 64.3 + 1.1 + 0.2(-0.4) = 65.3$	$T_8 = 1.1 + 0.1(-0.4) = 1.1$	$\hat{X}_8(1) = 65.3 + 1.1 = 66.4$
9	69.0	66.4	2.6	$S_9 = 65.3 + 1.1 + 0.2(2.6) = 66.9$	$T_9 = 1.1 + 0.1(2.6) = 1.4$	$\hat{X}_9(1) = 66.9 + 1.4 = 68.3$
10	70.0	68.3	1.7	$S_{10} = 66.9 + 1.4 + 0.2(1.7) = 68.6$	$T_{10} = 1.4 + 0.1(1.7) = 1.6$	$\hat{X}_{10}(1) = 68.6 + 1.6 = 70.2$
11	63.0	70.2	−7.2	$S_{11} = 68.6 + 1.6 + 0.2(-7.2) = 68.8$	$T_{11} = 1.6 + 0.1(-7.2) = 0.9$	$\hat{X}_{11}(1) = 68.8 + 0.9 = 69.7$
12	75.0	69.7	5.3	$S_{12} = 68.8 + 0.9 + 0.2(5.3) = 70.8$	$T_{12} = 0.9 + 0.1(5.3) = 1.4$	$\hat{X}_{12}(1) = 70.8 + 1.4 = 72$
13		72.2				

FSU

Μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης (Damped)

$$e_t = Y_t - F_t$$
$$S_t = S_{t-1} + \varphi T_{t-1} + a * e_t$$
$$T_t = \varphi T_{t-1} + a * b * e_t$$
$$\mathrm{F}_{t+m} = S_t + \sum_{i=1}^{m} \varphi^i T_t$$

Οι συντελεστές α και β πρέπει να υπολογίζονται, ώστε να ελαχιστοποιείται *συνήθως* το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), όπου 0<α<1, 0<β<a

- Χρειάζεται προσοχή στην αρχικοποίηση του μοντέλου.
- Πρέπει να εκτελείται μία γραμμική παλινδρόμηση, με το χρόνο ως ανεξάρτητη μεταβλητή.
- Ως αρχικό επίπεδο ορίζεται η σταθερά A της παλινδρόμησης.
- Ως αρχική τάση ορίζεται η κλίση b της παλινδρόμησης.

FSU

Μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης (Damped)

$$e_t = Y_t - F_t$$
$$S_t = S_{t-1} + \varphi T_{t-1} + a * e_t$$
$$T_t = \varphi T_{t-1} + a * b * e_t$$
$$\mathrm{F}_{t+m} = S_t + \sum_{i=1}^{m} \varphi^i T_t$$

Οι συντελεστές α και β πρέπει να υπολογίζονται, ώστε να ελαχιστοποιείται *συνήθως* το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE), όπου 0<α<1, 0<β<a

- Το μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα αυτόματο μοντέλο πρόβλεψης για κάθε μη εποχιακή χρονοσειρά, ανάλογα με τον damping factor που θα επιλέξουμε:
  - $\phi \approx 0$, σταθερού επιπέδου
  - $\phi < 1$, φθίνουσας τάσης
  - $\phi \approx 1$, γραμμικής τάσης
  - $\phi > 1$, εκθετικής τάσης

FSU

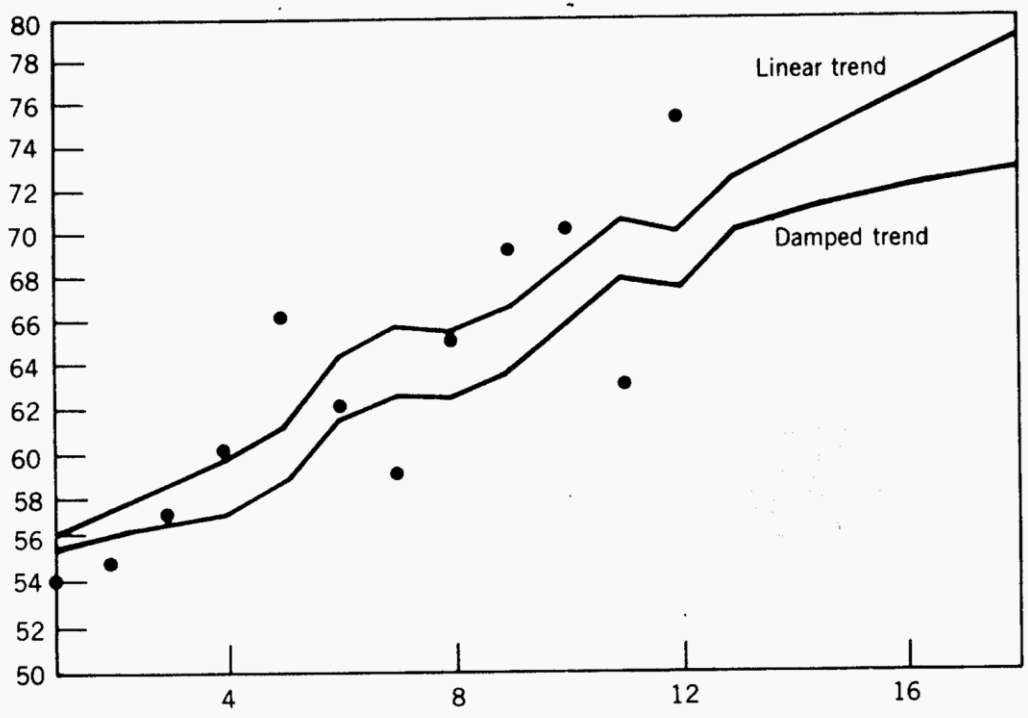
Μοντέλο Μη Γραμμικής Τάσης (Damped)

$$h_1 = 0.2, \qquad h_2 = 0.1, \qquad \varphi = 0.8$$

Time t	Data X_t	Forecast $X_{t-1}(1)$	Error e_t	Level at End of t $S_t = S_{t-1} + \phi T_{t-1} + h_1 e_t$	Trend at End of t $T_t = \phi T_{t-1} + h_2 e_t$	Forecast for $t+1$ $\hat{X}_t(1) = S_t + \phi T_t$
0				$S_0 =$ 54.0	$T_0 =$ 2.0	$\hat{X}_0(1) = 54.0 + 0.8(2.0) =$ 55.6
1	54.0	55.6	−1.6	$S_1 =$ 54.0 + 0.8(2.0) + 0.2(−1.6) = 55.3	$T_1 =$ 0.8(2.0) + 0.1(−1.6) = 1.4	$\hat{X}_1(1) = 55.3 + 0.8(1.4) =$ 56.4
2	55.0	56.4	−1.4	$S_2 =$ 55.3 + 0.8 (1.4) + 0.2(−1.4) = 56.1	$T_2 =$ 0.8 (1.4) + 0.1(−1.4) = 1.0	$\hat{X}_2(1) = 56.1 + 0.8(1.0) =$ 56.9
3	57.0	56.9	0.1	$S_3 =$ 56.1 + 0.8 (1.0) + 0.2(0.1) = 56.9	$T_3 =$ 0.8 (1.0) + 0.1(0.1) = 0.8	$\hat{X}_3(1) = 56.9 + 0.8(0.8) =$ 57.5
4	60.0	57.5	2.5	$S_4 =$ 56.9 + 0.8 (0.8) + 0.2(2.5) = 58.0	$T_4 =$ 0.8 (0.8) + 0.1(2.5) = 0.9	$\hat{X}_4(1) = 58.0 + 0.8(0.9) =$ 58.7
5	66.0	58.7	7.3	$S_5 =$ 58.0 + 0.8 (0.9) + 0.2(7.3) = 60.2	$T_5 =$ 0.8 (0.9) + 0.1(7.3) = 1.5	$\hat{X}_5(1) = 60.2 + 0.8(1.5) =$ 61.4
6	62.0	61.4	0.6	$S_6 =$ 60.2 + 0.8 (1.5) + 0.2(0.6) = 61.5	$T_6 =$ 0.8 (1.5) + 0.1(0.6) = 1.3	$\hat{X}_6(1) = 61.5 + 0.8(1.3) =$ 62.5
7	59.0	62.5	−3.5	$S_7 =$ 61.5 + 0.8 (1.3) + 0.1(−3.5) = 61.8	$T_7 =$ 0.8 (1.3) + 0.1(−3.5) = 0.7	$\hat{X}_7(1) = 61.8 + 0.8(0.7) =$ 62.4
8	65.0	62.4	2.6	$S_8 =$ 61.8 + 0.8 (0.7) + 0.2(2.6) = 62.9	$T_8 =$ 0.8 (0.7) + 0.1(2.6) = 0.8	$\hat{X}_8(1) = 62.9 + 0.8(0.8) =$ 63.5
9	69.0	63.5	5.5	$S_9 =$ 62.9 + 0.8 (0.8) + 0.2(5.5) = 64.6	$T_9 =$ 0.8 (0.8) + 0.1(5.5) = 1.2	$\hat{X}_9(1) = 64.6 + 0.8(1.2) =$ 65.6
10	70.0	65.6	4.4	$S_{10} =$ 64.6 + 0.8 (1.2) + 0.2(4.4) = 66.5	$T_{10} =$ 0.8 (1.2) + 0.1(4.4) = 1.4	$\hat{X}_{10}(1) = 66.5 + 0.8(1.4) =$ 67.6
11	63.0	67.6	−4.6	$S_{11} =$ 66.5 + 0.8 (1.4) + 0.2(−4.6) = 66.7	$T_{11} =$ 0.8 (1.4) + 0.1(−4.6) = 0.7	$\hat{X}_{11}(1) = 66.7 + 0.8(0.7) =$ 67.3
12	75.0	67.3	7.7	$S_{12} =$ 66.7 + 0.8 (0.7) + 0.2(7.7) = 68.8	$T_{12} =$ 0.8 (0.7) + 0.1(7.7) = 1.3	$\hat{X}_{12}(1) = 68.8 + 0.8(1.3) =$ 69.8
13		69.8				

FSU

Σύγκριση Μοντέλων Γραμμικής & Μη Γραμμικής Τάσης



Μοντέλο Σταθερού Επιπέδου με Πολ/κή Εποχιακότητα

$$h_1 = 0.1, \qquad h_3 = 0.01$$

Time t	Data X_t	Forecast $\hat{X}_{t-1}(1)$	Error e_t	Deseasonalized Level at End of t $S_t = S_{t-1} + h_1 e_t / I_{t-p}$	Seasonal Index at End of t $I_t = I_{t-p} + h_3 e_t / S_t$	Forecast for $t+1$ $\hat{X}_t(1) = S_t(I_{t-p+1})$
−3					$I_{-3} =$ 0.6122	
−2					$I_{-2} =$ 1.0086	
−1					$I_{-1} =$ 1.3303	
0				$S_0 =$ 74.3	$I_0 =$ 1.0489	$\hat{X}_0(1) = 74.3($ 0.6122 $) =$ 45.5
1	53.0	45.5	7.5	$S_1 =$ 74.3 + 0.1(7.5)/ 0.6122 = 75.5	$I_1 =$ 0.6122 + 0.01(7.5)/75.5 = 0.6132	$\hat{X}_1(1) = 75.5($ 1.0086 $) =$ 76.2
2	85.0	76.2	8.8	$S_2 =$ 75.5 + 0.1(8.8)/ 1.0086 = 76.4	$I_2 =$ 1.0086 + 0.01(8.8)/76.4 = 1.0098	$\hat{X}_2(1) = 76.4($ 1.3303 $) =$ 101.6
3	92.0	101.6	−9.6	$S_3 =$ 76.4 + 0.1(−9.6)/ 1.3303 = 75.7	$I_3 =$ 1.3303 + 0.01(−9.6)/75.7 = 1.3290	$\hat{X}_3(1) = 75.7($ 1.0489 $) =$ 79.4
4	78.0	79.4	−1.4	$S_4 =$ 75.7 + 0.1(−1.4)/ 1.0489 = 75.5	$I_4 =$ 1.0489 + 0.01(−1.4)/75.5 = 1.0487	$\hat{X}_4(1) = 75.5($ 0.6132 $) =$ 46.3
5	44.0	46.3	−2.3	$S_5 =$ 75.5 + 0.1(−2.3)/ 0.6132 = 75.2	$I_5 =$ 0.6132 + 0.01(−2.3)/75.2 = 0.6129	$\hat{X}_5 =$ 5.2(1.0098) = 75.9
6	75.0	75.9	−0.9	$S_6 =$ 75.2 + 0.1(−0.9)/ 1.0098 = 75.1	$I_6 =$ 1.0098 + 0.01(−0.9)/75.1 = 1.0096	$\hat{X}_6(1) = 75.1($ 1.3290 $) =$ 99.8
7	102.0	99.8	2.2	$S_7 =$ 75.1 + 0.1(2.2)/ 1.3290 = 75.2	$I_7 =$ 1.3290 + 0.01(2.2)/75.2 = 1.3293	$\hat{X}_7(1) = 75.2($ 1.0487 $) =$ 78.9
8	60.0	78.9	−18.9	$S_8 =$ 75.2 + 0.1(−18.9)/ 1.0487 = 73.4	$I_8 =$ 1.0487 + 0.01(−18.9)/73.4 = 1.0461	$\hat{X}_8(1) = 73.4($ 0.6129 $) =$ 45.0
9	55.0	45.0	10.0	$S_9 =$ 73.4 + 0.1(10.0)/ 0.6129 = 75.1	$I_9 =$ 0.6129 + 0.01(10.0)/75.1 = 0.6142	$\hat{X}_9(1) = 75.1($ 1.0096 $) =$ 75.8
10	88.0	75.8	12.2	$S_{10} =$ 75.1 + 0.1(12.2)/ 1.0096 = 76.3	$I_{10} =$ 1.0096 + 0.01(12.2)/76.3 = 1.0112	$\hat{X}_{10}(1) = 76.3($ 1.3293 $) =$ 101.4
11	108.0	101.4	6.6	$S_{11} =$ 76.3 + 0.1(6.6)/ 1.3293 = 76.8	$I_{11} =$ 1.3293 + 0.01(6.6)/76.8 = 1.3302	$\hat{X}_{11}(1) = 76.8($ 1.0461 $) =$ 80.3
12	59.0	80.3	−21.3	$S_{12} =$ 76.8 + 0.1(−21.3)/ 1.0461 = 74.7	$I_{12} =$ 1.0461 + 0.01(−21.3)/74.7 = 1.0433	$\hat{X}_{12}(1) = 74.7($ 0.6142 $) =$ 45.9
13		45.9				

FSU

Exponential Smoothing Using R

```
ses(x, h=10,
level=c(80,95),
fan=FALSE,
initial=c("optimal","s
imple"), alpha=NULL,
...)

holt(x, h=10,
damped=FALSE,
level=c(80,95),
fan=FALSE,
initial=c("optimal",
"simple"),
exponential=FALSE,
alpha=NULL, beta=NULL,
...)
```

x	a numeric vector or time series
h	Number of periods for forecasting.
damped	If TRUE, use a damped trend.
seasonal	Type of seasonality in hw model. "additive" or "multiplicative"
level	Confidence level for prediction intervals.
fan	If TRUE, level is set to seq(50,99,by=1). This is suitable for fan plots.
initial	Method used for selecting initial state values. If optimal, the initial values are optimized along with the smoothing parameters using ets. If simple, the initial values are set to values obtained using simple calculations on the first few observations. See Hyndman & Athanasopoulos (2012) for details.
exponential	If TRUE, an exponential trend is fitted. Otherwise, the trend is (locally) linear.
alpha	Value of smoothing parameter for the level. If NULL, it will be estimated.
beta	Value of smoothing parameter for the trend. If NULL, it will be estimated.
gamma	Value of smoothing parameter for the seasonal component. If NULL, it will be estimated.
...	Other arguments passed to forecast.ets.

FSU

Exponential Smoothing Using R

```
ses(x, h=10,
level=c(80,95),
fan=FALSE,
initial=c("optimal","s
imple"), alpha=NULL,
...)

holt(x, h=10,
damped=FALSE,
level=c(80,95),
fan=FALSE,
initial=c("optimal",
"simple"),
exponential=FALSE,
alpha=NULL, beta=NULL,
...)
```

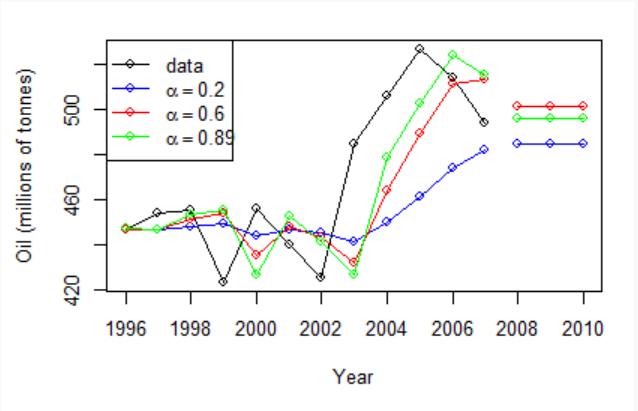
An object of class "forecast" is a list containing at least the following elements:

model	A list containing information about the fitted model
method	The name of the forecasting method as a character string
mean	Point forecasts as a time series
lower	Lower limits for prediction intervals
upper	Upper limits for prediction intervals
level	The confidence values associated with the prediction intervals
x	The original time series (either object itself or the time series used to create the model stored as object).
residuals	Residuals from the fitted model. That is x minus fitted values.
fitted	Fitted values (one-step forecasts)

FSU

Exponential Smoothing Using R

```
oildata <- window(oil,start=1996,end=2007)
fit1 <- ses(oildata, alpha=0.2, initial="simple", h=3)
fit2 <- ses(oildata, alpha=0.6, initial="simple", h=3)
fit3 <- ses(oildata, h=3)
plot(fit1, plot.conf=FALSE, ylab="Oil (millions of tonnes)",
     xlab="Year", main="", fcol="white", type="o")
lines(fitted(fit1), col="blue", type="o")
lines(fitted(fit2), col="red", type="o")
lines(fitted(fit3), col="green", type="o")
lines(fit1$mean, col="blue", type="o")
lines(fit2$mean, col="red", type="o")
lines(fit3$mean, col="green", type="o")
legend("topleft",lty=1, col=c(1,"blue","red","green"),
       c("data", expression(alpha == 0.2), expression(alpha == 0.6),
         expression(alpha == 0.89)),pch=1)
```



Exponential Smoothing Using R

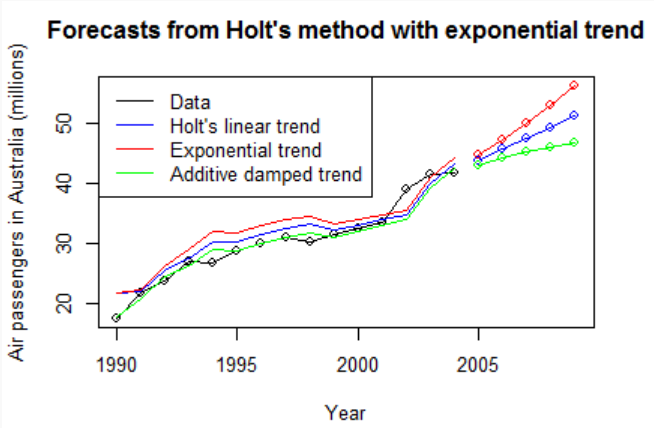
```
air <- window(ausair,start=1990,end=2004)
fit1 <- holt(air, alpha=0.8, beta=0.2, initial="simple",
h=5)
fit2 <- holt(air, alpha=0.8, beta=0.2, initial="simple",
exponential=TRUE, h=5)
# Results for first model:
fit1$model$state
fitted(fit1)
fit1$mean
```

```
> fitted(fit1)
Time Series:
Start = 1990
End = 2004
Frequency = 1
 [1] 21.86010 22.03237 25.48462 27.54059 30.28813 30.26106 3
1.58122 32.59923 33.24224 32.26755 33.07776 33.95807 34.7770
8
[14] 40.05535 43.21586
> fit1$mean
Time Series:
Start = 2005
End = 2009
Frequency = 1
[1] 43.75697 45.59352 47.43008 49.26663 51.10319
```

```
> fit1$model$state
Time Series:
Start = 1989
End = 2004
Frequency = 1
                l        b
1989 17.55340 4.306700
1990 18.41474 3.617628
1991 21.89455 3.590065
1992 24.20620 3.334382
1993 27.05156 3.236576
1994 27.56843 2.692635
1995 29.11733 2.463889
1996 30.37632 2.222910
1997 31.28265 1.959592
1998 30.79701 1.470546
1999 31.71727 1.360489
2000 32.67761 1.280459
2001 33.57353 1.203552
2002 38.17268 1.882672
2003 41.12022 2.095644
2004 41.92041 1.836555
```

Exponential Smoothing Using R

```
fit3 <- holt(air, alpha=0.8, beta=0.2,
damped=TRUE, initial="simple", h=5)
plot(fit2, type="o", ylab="Air passengers in
Australia (millions)", xlab="Year",
fcol="white", plot.conf=FALSE)
lines(fitted(fit1), col="blue")
lines(fitted(fit2), col="red")
lines(fitted(fit3), col="green")
lines(fit1$mean, col="blue", type="o")
lines(fit2$mean, col="red", type="o")
lines(fit3$mean, col="green", type="o")
legend("topleft",
lty=1, col=c("black","blue","red","green"),
c("Data","Holt's linear trend","Exponential
trend","Additive damped trend"))
```



Further Reading

- https://www.otexts.org/fpp/7/7
- Επιχειρησιακές Προβλέψεις, Πετρόπουλος Φ., Ασημακόπουλος Β., Αθήνα 2012
- Gardner Jr, E. S. (1985). Exponential smoothing: The state of the art. *Journal of Forecasting* **4**(1), 1–28.
- Gardner Jr, E. S. (2006). Exponential smoothing: The state of the art—Part II.*International Journal of Forecasting* **22**(4), 637–666.
- Hyndman, R. J., A. B. Koehler, J. K. Ord and R. D. Snyder (2008). *Forecasting with exponential smoothing: the state space approach*. Berlin: Springer-Verlag.

Feel free to say hi!

We are friendly and social

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφος
Αττική, 15780, Ελλάδα
E-mail: info(at)fsu.gr
Τηλέφωνο: 2107723637 Fax: 2107723740

Κτίριο της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
2ος όροφος - 2.2.1 Εργαστήριο

@FSU NTUA

Μονάδα Προβλέψεων και Στρατηγικής ΕΜΠ

lesson@fsu.gr

FSU